3.3 Äquivalenzrelationen

Definition 3.32 *Sein M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine 2-stellige Relation.*

(a) R ist reflexiv*, falls $1_M \subseteq R$, d.h.*

$$\forall a \in M \ \ \langle a, a \rangle \in R.$$

(b) R ist symmetrisch*, falls $R^{-1} \subseteq R$, d.h.*

$$\forall a, b \in M (\langle b, a \rangle \in R \rightarrow \langle a, b \rangle \in R).$$

(c) R ist transitiv*, falls $R \circ R \subseteq R$, d.h.*

$$\forall a, b, c \in M \ \ (\langle a, b \rangle \in R \wedge \langle b, c \rangle \in R \rightarrow \langle a, c \rangle \in R).$$

R ist eine partielle Äquivalenzrelation*, falls R transitiv und symmetrisch ist. R ist eine* Äquivalenzrelation*, falls R reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.*

Beispiel 3.33 *Sei $E \subseteq M$ eine Eigenschaft und $\mathcal{E} \subseteq 2^M$ eine Menge von Eigenschaften.*

(a) Die durch

$$R(a, b) :\Longleftrightarrow \ E(a) \wedge E(b)$$

definierte Relation $R \subseteq M \times M$ ist eine partielle Äquivalenzrelation. Sie ist nur dann eine Äquivalenzrelation, wenn $E = M$ ist.

(b) Die durch

$$R(a, b) :\Longleftrightarrow \ E(a) \leftrightarrow E(b)$$

definierte Relation ist eine Äquivalenzrelation.

(c) Die durch

$$R(a, b) :\Longleftrightarrow \ \exists P \in \mathcal{E}(P(a) \wedge P(b))$$

definierte Relation ist i.a. nicht transitiv, z.B. wenn $\mathcal{E} = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$.

(d) Die durch

$$R(a, b) :\Longleftrightarrow \ \forall P \in \mathcal{E}(P(a) \leftrightarrow P(b))$$

definierte Relation ist eine Äquivalenzrelation.

Beispiel 3.34 *Sei $f : A \rightarrow B$ eine partielle Funktion. Dann ist*

$$a_1 \simeq_f a_2 :\Longleftrightarrow \ \exists b \in B(\langle a_1, b \rangle \in f \wedge \langle a_2, b \rangle \in f)$$

eine partielle Äquivalenzrelation auf A.

Die Relation $\simeq_f$ ist genau dann eine Äquivalenzrelation, wenn f eine totale Funktion ist. Daher kommt auch der Name: a und b sind äquivalent*, d.h.* gleichwertig*, wenn ihre* Werte *$f(a)$ und $f(b)$ gleich sind, d.h. wenn $f(a) = f(b)$.*

Lemma 3.35 *Sei $\mathcal{R} \subseteq 2^{A\times A}$ eine Menge von Relationen.*

(a) Wenn jedes $R \in \mathcal{R}$ reflexiv ist, so ist auch $\bigcap \mathcal{R}$ reflexiv.

(b) Wenn jedes $R \in \mathcal{R}$ symmetrisch ist, so ist auch $\bigcap \mathcal{R}$ symmetrisch.

(c) Wenn jedes $R \in \mathcal{R}$ transitiv ist, so ist auch $\bigcap \mathcal{R}$ transitiv.

Beweis: Für alle $a, b \in A$ ist

$$\begin{aligned} \langle a,b\rangle \in \bigcap \mathcal{R} &\iff \langle a,b\rangle \in \{\, x \mid \forall R \in \mathcal{R}\ x \in R \,\} \\ &\iff \forall R \in \mathcal{R}\ \langle a,b\rangle \in R. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

(a) Für jedes $a \in A$ ist

$$\langle a,a\rangle \in \bigcap \mathcal{R} \iff \forall R \in \mathcal{R}\ \langle a,a\rangle \in R.$$

(b) Für jedes $\langle a,b\rangle \in A \times A$ ist

$$\begin{aligned} \langle a,b\rangle \in (\bigcap \mathcal{R})^{-1} &\iff \langle b,a\rangle \in (\bigcap \mathcal{R}) \\ &\iff \forall R \in \mathcal{R}\ \langle b,a\rangle \in R \\ &\iff \forall R \in \mathcal{R}\ \langle b,a\rangle \in R^{-1} \\ &\iff \forall R \in \mathcal{R}\ \langle a,b\rangle \in R \\ &\iff \langle a,b\rangle \in \bigcap \mathcal{R}. \end{aligned}$$

(c) Für alle $\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle \in A \times A$ ist

$$\begin{aligned} \langle a,b\rangle \in \bigcap \mathcal{R} \wedge \langle b,c\rangle \in \bigcap \mathcal{R} &\iff \forall R \in \mathcal{R}\, \langle a,b\rangle \in R \ \wedge\ \forall R' \in \mathcal{R}\, \langle b,c\rangle \in R' \\ &\Longrightarrow \forall R \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle \in R \wedge \langle b,c\rangle \in R) \\ &\Longrightarrow \forall R \in \mathcal{R}\ \langle a,c\rangle \in R \\ &\iff \langle a,c\rangle \in \bigcap \mathcal{R}. \end{aligned}$$

□

Korollar 3.36 *Ist $\mathcal{R} \subseteq 2^{A\times A}$ eine Menge von Äquivalenzrelationen auf A, so ist auch $\bigcap \mathcal{R}$ eine Äquivalenzrelation.*

Definition 3.37 *Eine* Zerlegung *(auch:* Klasseneinteilung, Partition*) der Menge M ist eine Menge $\mathcal{P} \subseteq 2^M$ von Teilmengen von M mit* *(a) jedes $P \in \mathcal{P}$ enthält ein $m \in M$,*

(b) je zwei verschiedene $P, P' \in \mathcal{P}$ sind disjunkt,

(c) jedes $m \in M$ liegt in einem $P \in \mathcal{P}$.

Definition 3.38 *Sei R eine Äquivalenzrelation auf M. Zu jedem $a \in M$ sei*

$$[a]_R := \{\, b \in M \mid \langle a, b \rangle \in R \,\}$$

die Äquivalenzklasse von *a und*

$$M/R := \{\, [a]_R \mid a \in M \,\}$$

die Menge aller Äquivalenzklassen.

Lemma 3.39 *Sei A eine Menge.*

(a) Ist $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation, so ist A/R eine Zerlegung von A.

(b) Ist $\mathcal{P}$ eine Zerlegung von A, so ist die durch

$$a \simeq_{\mathcal{P}} a' :\iff \exists P \in \mathcal{P}\ (a \in P \wedge a' \in P)$$

definierte Relation eine Äquivalenzrelation auf A.

Beweis:

(a) Wir zeigen für A/R die Eigenschaften einer Partition.

(i) Jede Menge $[a]_R$ enthält mindestens ein Element: da R reflexiv ist, ist $a \in [a]_R$.

(ii) Zwei verschiedene Mengen aus A/R sind disjunkt: Sind $[a]_R$ und $[a']_R$ nicht disjunkt, so gibt es ein $b \in [a]_R \cap [a']_R$, also $\langle a, b \rangle \in R \wedge \langle a', b \rangle \in R$. Da R symmetrisch und transitiv ist, folgen $\langle a, a' \rangle \in R$ und $\langle a', a \rangle \in R$, und weiter für jedes $c \in M$:

$$\begin{array}{rcl} c \in [a]_R & \iff & \langle a, c \rangle \in R \\ & \iff & \langle a, c \rangle \in R \wedge \langle a', a \rangle \in R \\ & \iff & \langle a', c \rangle \in R \wedge \langle a, a' \rangle \in R \\ & \iff & c \in [a']_R. \end{array}$$

Also ist $[a]_R = [a']_R$.

(iii) Jedes $a \in M$ liegt in einer Menge aus A/R: da R reflexiv ist, ist $a \in [a]_R$.

(b) $\simeq_{\mathcal{P}}$ ist reflexiv: da $\mathcal{P}$ eine Partition ist, gilt

$$\begin{aligned} a \in A &\iff \exists P \in \mathcal{P}\ a \in P \\ &\iff a \simeq_{\mathcal{P}} a. \end{aligned}$$

$\simeq_{\mathcal{P}}$ ist symmetrisch:

$$\begin{aligned} a \simeq_{\mathcal{P}} a' &\iff \exists P \in \mathcal{P}\ (P(a) \wedge P(a')) \\ &\iff \exists P \in \mathcal{P}\ (P(a') \wedge P(a)) \\ &\iff a' \simeq_{\mathcal{P}} a. \end{aligned}$$

$\simeq_{\mathcal{P}}$ ist transitiv: da je zwei nicht disjunkte Mengen aus $\mathcal{P}$ gleich sind, ist

$$\begin{aligned} a \simeq_{\mathcal{P}} a' \wedge a' \simeq_{\mathcal{P}} a'' &\iff \exists P \in \mathcal{P}\ (P(a) \wedge P(a'))\ \wedge \\ &\qquad \exists P' \in \mathcal{P}\ (P'(a') \wedge P'(a'')) \\ &\iff \exists P \in \mathcal{P}\ (P(a) \wedge P(a') \wedge P(a'')) \\ &\Longrightarrow a \simeq_{\mathcal{P}} a''. \end{aligned}$$

Beachte, daß bei (b) $A/\!\simeq_{\mathcal{P}}\ = \mathcal{P}$ ist. □

Beispiel 3.40 *Ist $f : A \to B$ und R die Äquivalenzrelation $\simeq_f$, so ist*

$$[a]_{\simeq_f} = \{\, a' \in A \mid f(a') = f(a) \,\}$$

die Menge aller Elemente von A, die denselben f-Wert wie a haben, eben $f(a)$.

Lemma 3.41 *Sei A eine Menge und $R \subseteq A \times A$. Dann sind äquivalent:*

(a) R ist eine Äquivalenzrelation.

(b) Es gibt eine Menge B und eine Funktion $f : A \to B$, so daß $R = \simeq_f$ ist.

Beweis: (b) ⇒ (a): Das ist klar, da $\simeq_f$ eine Äquivalenzrelation ist. (a) ⇒ (b): Wähle $B := A/R$ und setze $f(a) := [a]_R$. Offensichtlich ist $f : A \to B$ eine totale Funktion. Wir haben

$$\begin{aligned} a \simeq_f a' &\iff f(a) = f(a') \\ &\iff [a]_R = [a']_R. \end{aligned}$$

Da R eine Äquivalenzrelation ist, ist aber

$$[a]_R = [a']_R \quad\iff\quad R(a, a'),$$

wie man leicht nachrechnet. □