Musterlösung der Klausur zur Vorlesung Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik I

Universität München, CIS, WS 2001/2002

H.Leiß S.Leonardi

14. Februar 2002

Aufgabe 1 Seien p, q, r Aussagenvariablen und φ die Aussage $((p \to q) \to (r \to p)) \to (r \to q)$.

(a) Ist φ erfüllbar und ist $\neg\varphi$ erfüllbar? (3 Punkte)

Lösung
Eine Formel ist erfüllbar, wenn es mindestens eine Belegung gibt, die die Formel wahr macht. Aus den Wahrheitstafeln für φ und $\neg\varphi$ ist ersichtlich, dass sowohl φ als auch $\neg\varphi$ wahr werden können, damit sind beide Formeln erfüllbar (aber keine Tautologien!).

(b) Geben sie die Definition von „aus ψ folgt χ“ an! Folgt $((p \to q) \to (r \to p))$ aus $(r \to q)$? (3 Punkte)

Lösung
Aus ψ folgt χ genau dann, wenn jede Belegung h mit $h(\psi) = w$ auch $h(\chi) = w$ erfüllt. Also folgt $((p \to q) \to (r \to p))$ nicht aus $(r \to q)$ (siehe Wahrheitstafeln).

Aufgabe 2 (Freiwillig) Zeige durch Induktion über den Aufbau der aussagenlogischen Formeln α, deren Aussagenvariablen unter $p_1, \dots, p_n$ vorkommen:

> Um den Wahrheitswert $[\![\alpha]\!]_h \in \{0, 1\}$ unter der Belegung $h : \mathrm{Var} \to \{0, 1\}$ zu berechnen, braucht man von h nur die Werte $h(p_1), \dots, h(p_n)$ zu kennen. (4 Punkte)

Lösung

(a) α ist atomar:
Dann ist α eines der p_i und $[\![\alpha]\!]_h = h(p_i)$, also genügt $h(p_1), \dots, h(p_n)$.

(b) $\alpha = \neg\beta$:
Die Behauptung gilt für β. Da gilt

$$[\![\alpha]\!]_h = \begin{cases} 1 & \text{falls } [\![\beta]\!]_h = 0, \\ 0 & \text{falls } [\![\beta]\!]_h = 1 \end{cases}$$

kann man $[\![\alpha]\!]_h$ auch dann berechnen, wenn man nur $h(p_1), \dots, h(p_n)$ kennt.

(c) $\alpha = (\alpha_1 \wedge \alpha_2), (\alpha_1 \vee \alpha_2), (\alpha_1 \to \alpha_2)$ oder $(\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2)$:
Analog, da man nach Induktionsannahme die $[\![\alpha_i]\!]_h$ berechnen kann, wenn man $h(p_1), \dots, h(p_n)$ kennt, und dann nur noch die Wahrheitstafeln für die aussagenlogischen Junktoren braucht.

Aufgabe 3 Betrachte die Menge $M = \{1, 2, \ldots, 10\}$ mit einer 1- und einer 2-stelligen Relation,

$$R = \{\langle n, m\rangle \in M \times M \mid m = 2n \vee m = 3n\} \qquad \text{und} \qquad P = \{n \in M \mid 2 \leq n \leq 4\}.$$

Also enthalten die Relationen R und P folgende Elemente:

$$R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 2,6\rangle, \langle 3,6\rangle, \langle 3,9\rangle, \langle 4,8\rangle, \langle 5,10\rangle\} \qquad \text{und} \qquad P = \{2,3,4\}.$$

(a) Welche Elemente enthält $R \circ R$, die Komposition von R mit sich ? (2 Punkte)

Lösung
$R \circ R = \{\langle n, m\rangle \in M \times M \mid \exists x \in M(R(n,x) \wedge R(x,m))\} = \{\langle 1,4\rangle, \langle 1,6\rangle, \langle 1,9\rangle, \langle 2,8\rangle\}$

(b) Welche Elemente enthält $R \restriction_P$, die Einschränkung von R auf P ? (2 Punkte)

Lösung
$R \restriction_P = \{\langle n, m\rangle \in M \times M \mid R(n,m) \wedge n \in P)\} = \{\langle 2,4\rangle, \langle 2,6\rangle, \langle 3,6\rangle, \langle 3,9\rangle, \langle 4,8\rangle\}$

(c) Welche Elemente enthält $R[P]$, die Anwendung von R auf P? (2 Punkte)

Lösung
$R[P] = \{m \in M \mid \exists n \in P(R(n,m))\} = \{4,6,8,9\}$

Aufgabe 4 Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Für Wörter $w \in \Sigma^*$ definiere

$$|w|_a \quad := \quad \text{die Anzahl der Vorkommen des Buchstabens } a \text{ in } w,$$

entsprechend für $|w|_b$. Wir definieren eine 2-stellige Relation $\leq^{\Sigma^*}$ auf Σ^* durch

$$v \leq^{\Sigma^*} w \quad :\Longleftrightarrow \quad |v|_a \leq |w|_a.$$

(a) Welche der folgenden Behauptungen gilt: (2 Punkte)

(i) $\leq^{\Sigma^*}$ ist eine totale Ordnung auf Σ^*.
(ii) $\leq^{\Sigma^*}$ ist eine partielle Ordnung auf Σ^*.
(iii) $\leq^{\Sigma^*}$ ist eine Quasi-Ordnung auf Σ^*.

Lösung

(iii) $\leq^{\Sigma^*}$ ist eine Quasi-Ordnung auf Σ^*:
Wegen $|v|_a \leq |v|_a$ ist $\leq^{\Sigma^*}$ reflexiv, und wegen $(|u|_a \leq |v|_a \leq |w|_a \Rightarrow |u|_a \leq |w|_a)$ ist $\leq^{\Sigma^*}$ auch transitiv.

(b) Zeige für diejenige(n) der Aussagen (i) – (iii), die falsch ist (bzw. sind), durch ein Beispiel, warum sie falsch ist (bzw. sind). (3 Punkte)

Lösung

(i) Jede totale Ordnung ist auch eine partielle Ordnung.
Aber $\leq^{\Sigma^*}$ ist keine partielle Ordnung: siehe (ii).

(ii) $\leq^{\Sigma^*}$ ist zwar reflexiv und transitiv, aber nicht antisymmetrisch:
Für $v = aba$ und $w = aab$ ist $|v|_a = 2 = |w|_a$, also $v \leq^{\Sigma^*} w \leq^{\Sigma^*} v$, aber $v \neq w$.
Damit ist $\leq^{\Sigma^*}$ keine partielle Ordnung.

(c) Durch $v \sim w :\iff |v|_a = |w|_a$ wird eine Äquivalenzrelation auf Σ^* definiert.

(i) Gib drei Wörter u, v, w mit $u \not\sim v$, $u \not\sim w$ und $v \not\sim w$ an. (2 Punkte)

Lösung
$u = ba$
$v = aba$
$w = aabba$
Alle Wörter mit der gleichen Anzahl von $a's$ sind äquivalent.

(ii) Auf den Äquivalenzklassen sei eine Funktion $\cdot$ durch

$$[v] \cdot [w] \quad := \quad [vw]$$

definiert. Beweise, dass diese Operation *wohldefiniert* ist, d.h. dass gilt: (4 Punkte)

$$\forall v, v'w, w' \in \Sigma^* ([v] = [v'] \wedge [w] = [w'] \quad \Longrightarrow \quad [vw] = [v'w']).$$

Lösung
Seien $v, v', w, w' \in \Sigma^*$ mit $[v] = [v']$ und $[w] = [w']$ gegeben.
Dann ist $v \sim v'$ und $w \sim w'$ und damit $|v|_a = |v'|_a$ und $|w|_a = |w'|_a$.
Daraus folgt:

$$\begin{aligned} |vw|_a &= |v|_a + |w|_a \\ &= |v'|_a + |w'|_a \\ &= |v'w'|_a \end{aligned}$$

Damit ist $vw \sim v'w'$ und somit $[vw] = [v'w']$.
Da die Aussage für beliebige $v, v', w, w' \in \Sigma^*$ bewiesen wurde, gilt sie für alle Elemente von Σ^*!

Aufgabe 5 Sei $\mathcal{N} := \langle \mathbb{N}, < \rangle$ und $\mathcal{N}_\infty := \langle \mathbb{N} \cup \{\infty\}, < \rangle$ mit $n < n + 1 < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Drücke in der Umgangssprache aus, was die Formel

$$\varphi(x) := \forall y(y < x \to \exists z(y < z \wedge z < x))$$

über „die Menge der $<$-Vorgänger von x" besagt. (2 Punkte)

Lösung
"Die Menge der $<$-Vorgänger von x hat kein grösstes Element."

(b) Gib ein Element $m \in \mathbb{N}_\infty$ an, so dass $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{N}_\infty}_{[x:=m]} = 1$ ist. (1 Punkt)

Lösung
Es gibt zwei Möglichkeiten:
$m = \infty$ oder $m = 0$

(c) Gibt es auch ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{N}}_{[x:=m]} = 1$ ist? Wenn ja, gib eine solches m an, wenn nein, begründe, warum es keines gibt. (2 Punkte)

Lösung
Einzige Möglichkeit: $m = 0$
Die Menge der 0-Vorgänger ist leer, hat also kein grösstes Element. Damit wird die Prämisse der Implikation falsch und so die ganze Aussage wahr.

Aufgabe 6 Sei $C_k = \langle \{0, 1, \ldots, k\}, R^+ \rangle$, wobei R^+ die transitive Hülle der Relation

$$R = \{\langle 0, n \rangle \mid 1 \le n \le k\} \cup \{\langle n, n+1 \rangle \mid 1 \le n \le k\}$$

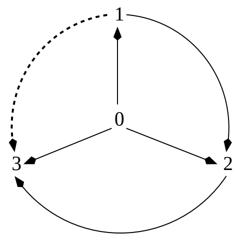
ist.

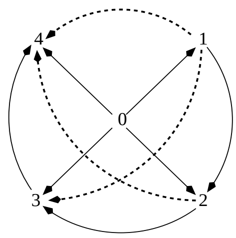
(a) Mache eine Zeichnung von C_3 und C_4. (1 Punkt)

Lösung

(i) Für C_3: $R^+ = \{\langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 0,3\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,3\rangle\}$

(ii) Für C_4: $R^+ = \{\langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 0,3\rangle, \langle 0,4\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,4\rangle\}$

$C_3 =$ 

$C_4 =$ 

(b) Gibt es einen Homomorphismus von C_4 nach C_3 ? (2 Punkte)
Gib im positiven Fall einen solchen Homomorphismus an!

Lösung
Es gibt keinen Homomorphismus h von C_4 nach C_3:
Wegen $|C_4| > |C_3|$ muß es $i < j$ mit $h(i) = h(j) = k$ für ein $k \le 3$ geben. In C_4 ist zwar das Tupel $\langle i, j \rangle \in R^+$, aber in C_3 ist das Tupel $\langle h(i), h(j) \rangle = \langle k, k \rangle \notin R^+$.
Es können also nicht alle Elemente aus C_4 auf C_3 abgebildet werden, da R^+ in der Struktur C_3 irreflexiv ist.

(c) Gibt es einen injektiven Homomorphismus von C_3 nach C_4 ? (2 Punkte)
Gib im positiven Fall einen solchen Homomorphismus an!

Lösung
Es gibt einen injektiven Homomorphismus von C_3 nach C_4, zum Beispiel:

$$h : C_3 \longrightarrow C_4 \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} h(0) &= 0 \\ h(1) &= 1 \\ h(2) &= 2 \\ h(3) &= 3 \end{aligned}$$