4

Äquivalenzrelationen, Ordnungsrelationen und Hüllenbildungen

Im vorausgegangenen Kapitel hatten wir das Konzept der Relation eingeführt und erläutert. In diesem Abschnitt werden nun einige wichtige Klassen von Relationen vorgestellt. Hierzu gehen wir in Abschnitt 4.1 zunächst auf einige grundlegende Eigenschaften ein, mit denen sich binäre Relationen charakterisieren lassen. Darauf aufbauend führen wir nachfolgend in 4.2 und 4.3 Äquivalenzrelationen und Ordnungsrelationen ein. Dieses sind die mit Abstand wichtigsten Typen mathematischer Relationen. Während Äquivalenzrelationen der Erfassung von Ähnlichkeiten dienen, besteht die Funktion der Ordnungsrelationen vor allem darin, daß sie einen systematischen Vergleich von Elementen ermöglichen. Beide Begriffe bilden die Grundlage für viele Betrachtungen in den nachfolgenden Kapiteln. Dies ist durchaus symptomatisch—man kann sich kaum ein Gebiet vorstellen, das einer mathematischen Beschreibung zugänglich ist, und wo nicht Äquivalenzrelationen oder Ordnungsrelationen in natürlicher Weise auftreten. In Abschnitt 4.4 stellen wir schließlich einige wichtige Formen der Erweiterung einer gegebenen Relation dar, insbesondere das Konzept der reflexiv-transitiven Hülle einer Relation, das im Zusammenhang mit dem Begriff der Ableitung bei Grammatiken und verwandten formalen Systemen große Bedeutung besitzt.

4.1 Charakteristische Eigenschaften zweistelliger Relationen

Die meisten mathematisch relevanten zweistellingen Relationen auf einer gegebenen Menge besitzen charakteristische Eigenschaften wie die im folgenden aufgelisteten.

Definition 4.1 Sei $R \subseteq A \times A$ eine Relation;

(i) R heißt *reflexiv* genau dann, wenn gilt
$\forall a \in A\colon R(a,a)$,

(ii) R heißt *transitiv* genau dann, wenn gilt
$\forall a,b,c \in A\colon (R(a,b) \wedge R(b,c)) \Rightarrow R(a,c))$,

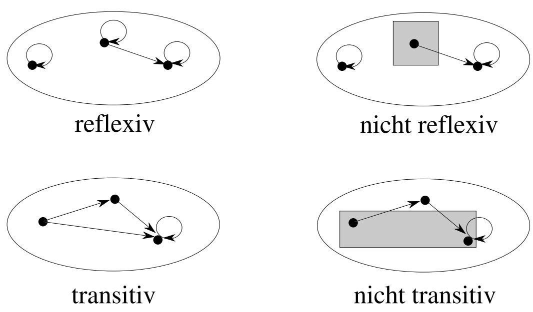
(iii) R heißt *symmetrisch* genau dann, wenn gilt
$\forall a,b \in A\colon (R(a,b) \Rightarrow R(b,a))$,

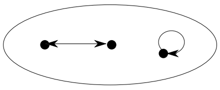
(iv) R heißt *antisymmetrisch* genau dann, wenn gilt
$\forall a,b \in A\colon ((R(a,b) \wedge R(b,a)) \Rightarrow a = b)$.

(v) R heißt *irreflexiv* genau dann, wenn gilt
$\forall a \in A\colon \neg R(a,a)$.

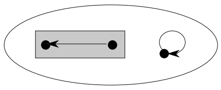
Zu diesen Eigenschaften nun einige Beispiele und Gegenbeispiele. Bei den Gegenbeispielen sind die relevanten Konstellationen unterlegt.

Die folgenden Relationen sind

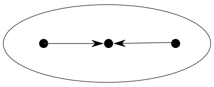




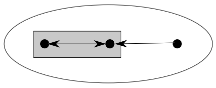
symmetrisch



nicht symmetrisch

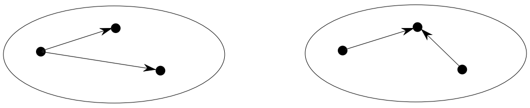


antisymmetrisch



nicht antisymmetrisch

Bemerkung 4.2 Die Bedingungen, die die Transitivität, Symmetrie und Antisymmetrie charakterisieren, beinhalten jeweils spezielle Implikationen, die für beliebige Elemente des Grundbereichs A gelten müssen. Es ist an dieser Stelle wichtig, sich die Bemerkungen aus Abschnitt 1.5 in Erinnerung zu rufen: eine Implikation ist inbesondere dann wahr, wenn bereits die Prämisse falsch ist. Im hier vorliegenden Fall bedeutet dies zum Beispiel, daß die nachfolgend dargestellten Relationen beide transitiv sind.



In der Tat gibt es in beiden Fällen keine Elemente $a, b, c \in A$, die in der Beziehung $R(a, b)$ und $R(b, c)$ stehen. Daher ist die Implikation $(R(a, b) \wedge R(b, c)) \rightarrow R(a, c)$ stets in trivialer Weise erfüllt. In beiden Fällen gibt es auch keine Elemente $a, b \in A$, die die Bedingung $R(a, b) \wedge R(b, a)$ erfüllen, daher sind die abgebildeten Relationen auch antisymmetrisch. Aus ähnlichen Gründen ist die leere Relation „$\emptyset$“ *immer* transitiv, symmetrisch und antisymmetrisch, die Identitätsrelation Id_A (vgl. Def. 3.35) auf einer Menge A ist stets reflexiv, transitiv, symmetrisch und antisymmetrisch (Aufgabe 4.8).

Reflexivität, Symmetrie und Transitivität können mit Hilfe der Identitätsrelation, der Umkehrrelation und der Komposition wie folgt charakterisiert werden.

Lemma 4.3 *Es sei R eine zweistellige Relation auf der Menge A. Dann gilt:*

1. *R ist reflexiv genau dann, wenn $\mathrm{Id}_A \subseteq R$ gilt.*

R	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	1
2	1	1	0	0	1
3	0	1	1	0	0
4	0	0	0	1	0
5	0	0	1	0	1

S	1	2	3	4	5
1	1	1	0	0	1
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	0	1
4	0	0	0	1	1
5	1	0	1	1	0

Abbildung 4.1: Matrixdarstellung einer reflexiven (R) und einer symmetrischen Relation (S).

2. *R ist symmetrisch genau dann, wenn $R^{-1} \subseteq R$ gilt.*
3. *R ist transitiv genau dann, wenn $R \circ R \subseteq R$ gilt.*
4. *R ist antisymmetrisch genau dann, wenn $R \cap R^{-1} \subseteq Id_A$ gilt.*

Beweis. Übung (vgl. Aufgabe 4.7). ■

Wie Abbildung 4.1 illustriert, ist eine zweistellige Relation R auf einer endlichen Menge A reflexiv genau dann, wenn in der Matrixdarstellung die Diagonale überall mit 1 besetzt ist. Eine Relation ist symmetrisch, wenn die zugehörige Matrix spiegelsymmetrisch zur Diagonalen ist. Das folgende Lemma zeigt, daß reflexive, symmetrische und transitive Relationen auf einer Menge unter Durchschnittsbildung abgeschlossen sind.

Lemma 4.4 *Es seien $\{R_i \mid i \in I\}$ eine nichtleere Menge zweistelliger Relationen auf derselben Menge A. Dann gilt:*

1. *Sind alle Relationen R_i ($i \in I$) reflexiv, so ist auch $\bigcap_{i \in I} R_i$ reflexiv.*
2. *Sind alle Relationen R_i ($i \in I$) symmetrisch, so ist auch $\bigcap_{i \in I} R_i$ symmetrisch.*
3. *Sind alle Relationen R_i ($i \in I$) transitiv, so ist auch $\bigcap_{i \in I} R_i$ transitiv.*

Der Beweis von Lemma 4.4 ist einfach und bleibt als Übungsaufgabe (vgl. Aufgabe 4.2).

Der Vollständigkeit halber seien noch die folgenden Eigenschaften zweistelliger Relationen erwähnt, die gelegentlich in der Literatur auftreten.

Definition 4.5 Eine zweistellige Relation $R \subseteq A \times A$ heißt *euklidisch* genau dann, wenn gilt:

$$\forall a, b, c \in A\colon ((R(a,b) \wedge R(a,c)) \Rightarrow R(b,c)).$$

R heißt *anti–euklidisch* genau dann, wenn gilt

$$\forall a, b, c \in A\colon ((R(a,b) \wedge R(c,b)) \Rightarrow R(a,c)).$$

Die in diesem Abschnitt eingeführten Eigenschaften sind natürlich nicht völlig unabhängig voneinander. Beispielsweise ist jede Relation R, die euklidisch und reflexiv ist, stets auch symmetrisch. Dazu vergleiche man Aufgabe 4.9 am Kapitelende.

4.2 Äquivalenzrelationen

Der Begriff der Äquivalenz verallgemeinert den Begriff der Gleichheit und beinhaltet in einem zu präzisierenden Sinn Gleichheit unter einem bestimmten Aspekt.

Definition 4.6 Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt *Äquivalenzrelation* auf A, genau dann, wenn R reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

Es ist banal sich klarzumachen, daß für jede Menge A die Gleichheitsrelation Id_A in der Tat eine Äquivalenzrelation ist. Statt $R(a,b)$ schreibt man für Äquivalenzrelationen meistens in Infixnotation $a \sim_R b$, oder einfach $a \sim b$, wenn R aus dem Zusammenhang klar ist.

Beispiele 4.7 Nachfolgend eine kleine Liste von Äquivalenzrelationen. Die Beispiele „aus dem täglichen Leben" setzen streng genommen eine striktere Formalisierung voraus.

1. Es sei $f\colon A \to B$ eine beliebige Funktion. Dann wird durch

   $$a_1 \sim_f a_2 \;:\Leftrightarrow\; f(a_1) = f(a_2)$$

   eine Äquivalenzrelation auf A definiert. Die Äquivalenzrelation „$\sim_f$" heißt die durch die Abbildung f *induzierte Äquivalenzrelation.* Wir

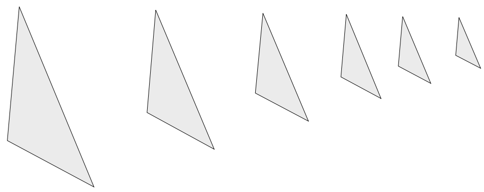


Abbildung 4.2: Ähnlichkeit von Dreiecken als Beispiel für Äquivalenz.

werden unten sehen, daß jede Äquivalenzrelationen bei geeigneter Betrachtungsweise durch eine passende Abbildung induziert ist. Man möge sich dies auch bei den nachfolgenden Beispielen verdeutlichen (vgl. hierzu Aufgabe 4.12).

2. Es sei $0 \neq n$ eine natürliche Zahl. Die Relation R, die auf zwei natürliche Zahlen k und l zutrifft genau dann, wenn beide beim Teilen durch n denselben Rest lassen, ist eine Äquivalenzrelation.

3. Es sei M eine Menge von berufstätigen Personen. Die Relation R, die besagt, daß zwei Personen dieselbe Steuerklasse haben, ist eine Äquivalenzrelation.

4. Es sei M die Menge der Schüler/innen einer Schule. Die Relation R, die besagt, daß zwei Elemente von M in dieselbe Klasse gehen, ist eine Äquivalenzrelation.

5. Die leere Relation $\emptyset$ ist eine Äquivalenzrelation auf der leeren Menge $\emptyset$. Es ist die einzige Äquivalenzrelation auf dieser Menge. Für jede Menge M ist stets $M \times M$ eine Äquivalenzrelation auf M.

6. Die sogenannte „Ähnlichkeit"[1] von Figuren im zweidimensionalen euklidischen Raum definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Dreiecke. In Abbildung 4.2 sind einige ähnliche Dreiecke dargestellt.

Es ist oft zweckmäßig, die Mengen paarweise äquivalenter Objekte unter einem neuen Begriff zusammenzufassen. Beim Beispiel der Schüler/innen sind das die Schulklassen. Für sehr viele praktische Aufgaben, wie das Erstellen eines Stundenplans, kann nämlich von den einzelnen Mitgliedern der Klassen abstrahiert werden, man kann sich stattdessen auf wenige Klassennamen

[1] Informell besagt die Ähnlichkeit zweier Figuren, daß man zwischen den Strecken beider Figuren eine Bijektion herstellen kann, die alle Proportionen und Winkel erhält.

beschränken. Dasselbe prinzipielle Vorgehen ist auch in der Mathematik von großer Bedeutung. Dies rechtfertigt die folgenden Begriffe:

Definition 4.8 Sei $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation. Für jedes $a \in A$ wird die Menge $\{b \in A \mid b \sim_R a\}$ die *Äquivalenzklasse* von a bezüglich R (oder modulo R) genannt und kurz als $[a]_R$ notiert. Die Menge $\{[a]_R \mid a \in A\}$ aller Äquivalenzklassen modulo R wird mit A/R (lies: Quotientenmenge von A modulo R) oder $A/\!\sim_R$ bezeichnet.

Wenn die Relation R aus dem Zusammenhang klar ist, schreiben wir einfacher $[a]$ und $A/\!\sim$ anstatt $[a]_R$ beziehungsweise $A/\!\sim_R$.

Definition 4.9 Sei $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation. Jedes Element $b \in [a]$ heißt *Vertreter* oder *Repräsentant* der Äquivalenzklasse $[a]$. Eine Menge $V \subseteq A$ heißt *Vertretersystem* oder *Repräsentantensystem* bezüglich R genau dann, falls V aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält, das heißt, falls gilt

1. $\forall a \in A\ \exists v \in V\colon a \sim v$,
2. $\forall w, v \in V\colon (v \neq w \Rightarrow [v] \neq [w])$.

Lemma 4.10 *Es sei $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation und $a, b \in A$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

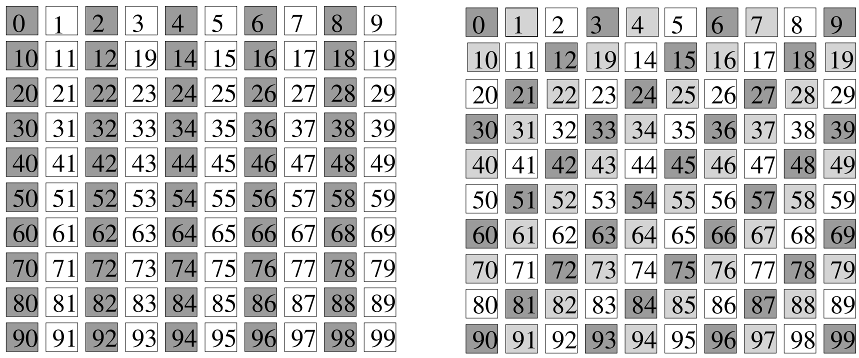
1. $[a] = [b]$,
2. $a \sim b$,
3. $b \sim a$,
4. $a \in [b]$,
5. $b \in [a]$.

Beweis. Wir zeigen die Äquivalenz von 1 und 2, der Rest bleibt als Übung. Falls $[a] = [b]$ gilt, so folgt $a \in [a] = [b]$ wegen der Reflexivität von R. Aus $a \in [b]$ folgt $a \sim b$. Es gelte nun umgekehrt $a \sim b$. Da R symmetrisch ist, gilt auch $b \sim a$. Es sei $c \in [a]$. Dann gilt $c \sim a$, wegen der Transitivität von R folgt $c \sim b$, das heißt $c \in [b]$. Demnach gilt $[a] \subseteq [b]$. Symmetrisch folgt $[b] \subseteq [a]$, insgesamt also $[a] = [b]$. ■

Definition 4.11 Die Funktion κ: $A \to A/{\sim}$; $a \mapsto [a]$ wird als die *kanonische Abbildung* von A auf die Quotientenmenge $A/{\sim}$ bezeichnet.

Lemma 4.10 zeigt, daß $a \sim b$ gilt genau dann, wenn $\kappa(a) = \kappa(b)$. Jede Äquivalenzrelation ist damit induziert (im Sinn von Beispiele 4.7 Nr. 1) durch die zugehörige kanonische Abbildung κ. Zu den nun eingeführten Begriffen eine Illustration.

Beispiel 4.12 Es sei $0 \neq n$ eine natürliche Zahl. Wir betrachten die Äquivalenzrelation R, die auf zwei natürliche Zahlen k und l zutrifft genau dann, wenn beide beim Teilen durch n denselben Rest lassen. Die nachfolgende Abbildung gibt die zwei (beziehungsweise drei) existierenden Äquivalenzklassen $[0]_R$ und $[1]_R$ ($[0]_R, [1]_R$ und $[2]_R$) für den Fall $n = 2$ (respektive $n = 3$) wieder.



Für den links dargestellten Fall $n = 2$ sind genau die geraden Zahlen die möglichen Vertreter von $[0]_R$, die ungeraden Zahlen sind die möglichen Vertreter von $[1]_R$. Eine zweielementige Teilmenge V von $\mathbb{N}$ ist ein Vertretersystem für R genau dann, wenn V eine gerade und eine ungerade Zahl enthält.

Wir zeigen nun, daß Äquivalenzrelationen und Partitionen (vgl. Definition 2.23) nur zwei verschiedene Formalisierungen derselben Situation darstellen.

Lemma 4.13 *Es sei R eine Äquivalenzrelation auf der Menge A. Dann ist $\Pi := A/{\sim_R}$ eine Partition von A. Ist umgekehrt Π eine Partition der Menge A, dann wird durch*

$$a \sim_\Pi b \quad :\Leftrightarrow \quad \exists B \in \Pi\colon a, b \in B$$

eine Äquivalenzrelation auf A definiert und es gilt $A/{\sim_\Pi} = \Pi$.

Beweis. Um die erste Teilaussage zu beweisen, zeigen wir, daß Π die drei Eigenschaften besitzt, die gemäß Definition 2.23 eine Partition einer Menge A charakterisieren.

1. Offensichtlich sind alle Mengen $[a] \in A/{\sim_R}$ nichtleer für jedes $a \in A$, da stets $a \in [a]$ aufgrund der Reflexivität von „$\sim$" gilt. Aus der Definition der Menge $[a]$ ergibt sich sofort, daß stets $[a]$ eine Teilmenge von A ist.

2. Aus der verifizierten Eigenschaft 1 folgt leicht

$$\bigcup A/{\sim_R} = \bigcup \{[a] \mid a \in A\} \subseteq A.$$

Ist $a \in A$, so gilt wegen der Reflexivität von „$\sim$" stets $a \in [a] \in A/{\sim_R}$, damit aber gemäß der Definition der Vereinigung auch $a \in \bigcup A/{\sim_R}$. Damit haben wir die Gleichheit der Mengen $\bigcup A/{\sim_R}$ und A gezeigt.

3. Für $[a] \neq [b]$ sind die Mengen $[a]$ und $[b]$ disjunkt: falls $c \in [a] \cap [b]$, so folgt $c \sim a$ und $c \sim b$. Da „$\sim$" symmetrisch und transitiv ist, folgt $a \sim c$ und $a \sim b$. Somit $[a] = [b]$ nach Lemma 4.10.

Der Beweis der zweiten Teilaussage bleibt als Übung offen. ■

Zur Erläuterung von Lemma 4.13 und zur graphischen Repräsentation von Äquivalenzrelationen hier noch ein weiteres Beispiel.

Beispiel 4.14 Die Menge $A = \{1, 2, 3, 4\}$ besitzt (unter anderem) die Partition $\Pi = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$. Die korrespondierende Äquivalenzrelation $\sim_\Pi$ ist in Abbildung 4.3 in der Mitte durch Pfeile angedeutet. Es fällt auf, daß innerhalb einer Äquivalenzklasse je zwei Elemente immer durch Pfeile verbunden sind, Elemente verschiedener Äquivalenzklassen hingegen nie. Die Äquivalenzklassen von $\sim_\Pi$ sind genau die Elemente (Partitionsmengen) von Π, nämlich $[1] = [2] = \{1, 2\}$ (mit den möglichen Vertretern 1 und 2) sowie $[3] = \{3, 4\}$. Es gibt vier mögliche Vertretersysteme, nämlich $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$ und $\{2, 4\}$. Die Quotientenmenge $A/{\sim}$ besitzt lediglich zwei Elemente, nämlich $[1]$ und $[3]$. Die kanonische Abbildung κ ist durch graue Pfeile angedeutet.

Wie im vorausgegangenen Beispiel gilt bei der Darstellung einer Äquivalenzrelation durch Pfeile allgemein, daß stets alle Elemente innerhalb einer

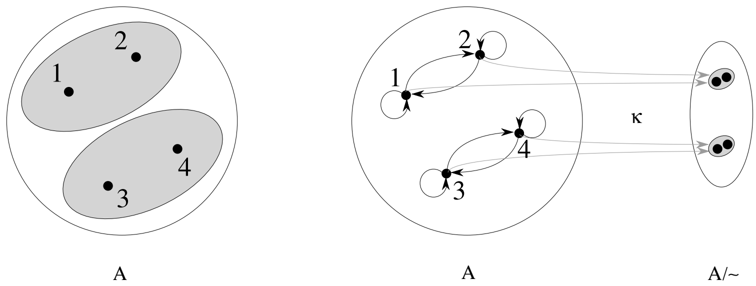
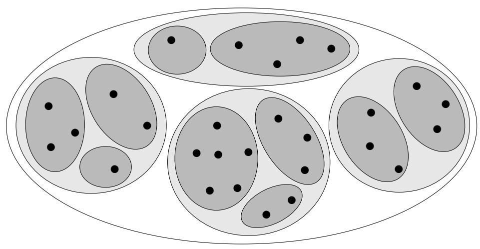


Abbildung 4.3: Partition, korrespondierende Äquivalenzrelation, kanonische Abbildung und Quotientenmenge.

Äquivalenzklasse wechselseitig durch Pfeile verbunden sind, Elemente verschiedener Äquivalenzklassen hingegen nie.

Definition 4.15 Es seien R und S zwei Äquivalenzrelationen auf A. Dann heißt S eine *Verfeinerung* von R genau dann, wenn jede Äquivalenzklasse bezüglich S enthalten ist in der entsprechenden Äquivalenzklasse bezüglich R, das heißt, wenn gilt: $\forall a \in A$: $[a]_S \subseteq [a]_R$.

In nachfolgender Illustration ist die durch dunkle Schattierungen dargestellte Äquivalenzrelation (Partition) eine Verfeinerung der durch die hellen Schattierungen angedeuteten Äquivalenzrelation.



Weitere Beispiele für Verfeinerungen ergeben sich bei Äquivalenzrelationen, die durch komponierte Funktionen induziert sind.

Beispiel 4.16 Seien f: $A \to B$ und g: $B \to C$ Funktionen. Die Äquivalenz-

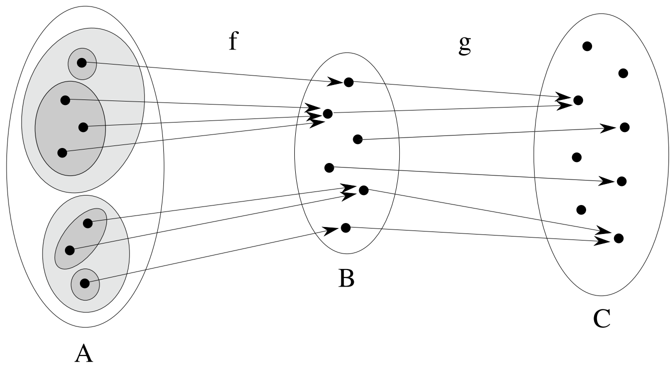


Abbildung 4.4: Verfeinerungen und induzierte Äquivalenzrelationen.

relationen $\sim_f$ und $\sim_{f\circ g}$ auf A seien vermöge

$$\begin{aligned} a_1 \sim_f a_2 &\quad :\Leftrightarrow \quad f(a_1) = f(a_2) \\ a_1 \sim_{f\circ g} a_2 &\quad :\Leftrightarrow \quad g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \end{aligned}$$

definiert. Dann ist $\sim_f$ eine Verfeinerung von $\sim_{f\circ g}$. Dies ist in Abbildung 4.4 illustriert.

Das nachfolgende Lemma weist auf eine weitere Situation hin, wo Verfeinerungen von Äquivalenzrelationen in natürlicher Weise auftreten.

Lemma 4.17 *Für jeden Index i der nichtleeren Indexmenge I sei R_i eine Äquivalenzrelation auf der Menge A. Dann ist auch der Durchschnitt $\bigcap_{i\in I} R_i$ wieder eine Äquivalenzrelation auf A. Für jedes $j \in I$ ist $\bigcap_{i\in I} R_i$ eine Verfeinerung von R_j.*

Beweis. Jede der Relationen R_i ist nach Voraussetzung reflexiv, transitiv und symmetrisch. Damit ist nach Lemma 4.4 auch $\bigcap_{i\in I} R_i$ reflexiv, transitiv und symmetrisch. Also ist $\bigcap_{i\in I} R_i$ eine Äquivalenzrelation. Sei nun $a \in A$ und $j \in I$. Aus $a \sim_{\bigcap_{i\in I} R_i} b$ folgt $a \sim_{R_j} b$. Damit gilt $[a]_{\bigcap_{i\in I} R_i} \subseteq [a]_{R_j}$, und $\bigcap_{i\in I} R_i$ ist eine Verfeinerung von R_j. ∎

Beispiel 4.18 Abbildung 4.5 repräsentiert zwei Äquivalenzrelationen auf der Menge $\{a, b, c, \ldots, s, t\}$ und ihren Durchschnitt. Wenn sich die Äquivalenzklassen beider Äquivalenzrelationen geometrisch durch Durchführen

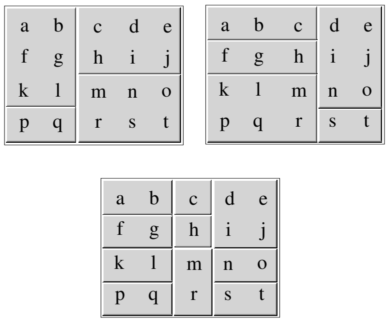


Abbildung 4.5: Äquivalenzklassen des Durchschnitts zweier Äquivalenzrelationen.

bestimmter „Schnitte“ ergeben, so ergibt sich der Durchschnitt der Äquivalenzrelationen durch Durchführen aller Schnitte beider Teilrelationen. Das vorangegangene Beispiel läßt sich verallgemeinern.

Lemma 4.19 *Für jeden Index i der nichtleeren Indexmenge I sei R_i eine Äquivalenzrelation auf der Menge A. Dann gilt für alle $a \in A$ stets $[a]_{\bigcap_{i\in I} R_i} = \bigcap_{i\in I}[a]_{R_i}$.*

Der Beweis wird als Übung offengelassen (vgl. Aufgabe 4.16).

Lemma 4.20 *Die Vereinigung zweier Äquivalenzrelationen R_1 und R_2 auf derselben Menge A ist im allgemeinen keine Äquivalenzrelation, aber stets symmetrisch und reflexiv.*

Beweis. Wir betrachten die Äquivalenzrelation S_1, die durch die Partition $\{\{1,2\},\{3\}\}$ der Menge $\{1,2,3\}$ bestimmt ist, analog sei S_2 durch $\{\{1\},\{2,3\}\}$ bestimmt. $S_1 \cup S_2$ enthält genau die Paare $\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle$, nicht jedoch $\langle 1,3\rangle$. Somit ist $S_1 \cup S_2$ nicht transitiv. Sind nun R_1 und R_2 beliebige Äquivalenzrelationen auf A, so mit ihnen offenkundig auch $R_1 \cup R_2$ symmetrisch und reflexiv. ■

4.3 Ordnungsrelationen

Ordnungsrelationen spielen immer dann eine Rolle, wenn man alle Elemente einer Menge in einer systematischen Reihenfolge behandeln will, oder wenn man Elemente unter einem bestimmten Gesichtpunkt vergleichen möchte. Wenn man diese zunächst recht grobe Intuition präzisiert, kommt man zu einer Reihe unterschiedlicher Begriffe.

Definition 4.21 Es sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf der Menge A.

1. R heißt *Quasi-Ordnung* auf A genau dann, wenn R reflexiv und transitiv ist.
2. R heißt *partielle Ordnung* auf A genau dann, wenn R transitiv, reflexiv und antisymmetrisch ist.
3. Eine partielle Ordnung R auf A heißt *lineare Ordnung* oder *Totalordnung* genau dann, wenn zusätzlich gilt:

$$\forall a, b \in A\colon (R(a,b) \text{ oder } R(b,a)).$$

Bevor wir Beispiele geben und die Begriffe näher erläutern, gehen wir kurz auf notationelle Konventionen und Varianten ein.

Ist R eine Ordnung eines Typs 1–3, so schreibt man meist $a \leq_R b$ oder $a \leq b$ anstatt $R(a,b)$, außerdem $a < b$ falls $a \leq b$ und nicht $a \leq b$. Wie die Schreibweise andeutet, werden anstelle der oben definierten partiellen und linearen Ordnungen manchmal auch „strikte“ Versionen betrachtet, wo ein Element nie zu sich selbst in Relation steht.

Definition 4.22 Eine *strikte partielle Ordnung* auf der Menge A ist eine Relation $R \subseteq A \times A$, die irreflexiv und transitiv ist. R heißt *strikte lineare Ordnung* genau dann, wenn außerdem für alle $a \neq b \in A$ stets $R(a,b)$ oder $R(b,a)$ gilt.

Üblicherweise werden strikte Ordnungen mit dem Symbol „$<$“ bezeichnet. Man beachte, daß jede strikte (partielle oder lineare) Ordnung „$<$“ automatisch „vollständig unsymmetrisch“ im folgenden Sinn ist: für $a \neq b \in A$ gilt nie zugleich $a < b$ und $b < a$. In der Tat, aufgrund der Transitivität hätte man sofort $a < a$, was der Irreflexivität widerspricht.

Man kann aus jeder partiellen oder linearen Ordnung „$\leq$" durch Weglassen der Identität eine strikte Version „$<$" erhalten, und umgekehrt aus jeder strikten partiellen oder linearen Ordnung durch Vereinigung mit der Identitätsrelation eine normale (d.h. reflexive) partielle Ordnung erhalten. Deswegen ist es bei partiellen und linearen Ordnungen gleichgültig, ob wir strikte oder nicht-strikte Versionen näher betrachten. Wir werden auf strikte Ordnungen nicht weiter eingehen.

Definition 4.23 Es sei „$\leq$" eine partielle Ordnung auf der Menge A.

1. Das Element $a \in A$ heißt *minimal* (*maximal*) bezüglich „$\leq$" genau dann, wenn für alle $b \in A$ aus $b \leq a$ (resp. $a \leq b$) stets $b = a$ folgt.
2. Das Element $a \in A$ heißt das *kleinste* (*größte*) Element bezüglich „$\leq$" genau dann, wenn für alle $b \in A$ stets $a \leq b$ (resp. $b \leq a$) gilt.

In den unten aufgeführten Beispielen wird deutlich werden, daß es nicht immer minimale, maximale, kleinste oder größte Elemente bezüglich einer vorgegebenen partiellen Ordnung gibt. Falls das kleinste (größte) Element existiert, ist eindeutig und stets auch minimal (maximal), die Umkehrung gilt aber in der Regel nicht, da es viele minimale Elemente geben kann.

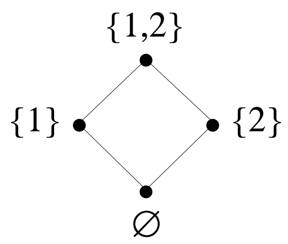
Die ersten drei der nun folgenden Beispiele sollen dazu dienen, die charakteristischen Eigenschaften der drei Ordnungstypen und die Unterschiede zu verdeutlichen. Zunächst mag der Hinweis nützlich sein, daß jede lineare Ordnung stets eine partielle Ordnung ist, jede partielle Ordnung immer eine Quasi-Ordnung. Es handelt sich also um eine hierarchische Begriffsbildung. Man spricht von einer „echten" partiellen Ordnung (Quasi-Ordnung), wenn eine partielle Ordnung (resp. Quasi-Ordnung) vorliegt, die nicht weitergehend eine lineare (partielle) Ordnung darstellt.

Beispiele 4.24 Die natürliche Ordnung „$\leq$" auf der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist eine lineare Ordnung. Es ist 0 das eindeutig bestimmte kleinste Element von $\mathbb{N}$ bezüglich „$\leq$". Es gibt kein maximales Element bezüglich „$\leq$". Die natürlichen Ordnungen auf den ganzen, rationalen, oder reellen Zahlen sind gleichfalls lineare Ordnungen. Sie besitzen jeweils keine minimalen oder kleinsten Elemente.

Charakteristisch für alle lineare Ordnungen ist es, daß man je zwei verschiedene Elemente immer bezüglich der Ordnung vergleichen und in eine eindeutige Reihenfolge bringen kann.

Beispiel 4.25 Es sei M eine beliebige Menge. Dann ist die Inklusionsbeziehung „$\subseteq$" ist eine partielle Ordnung auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ (vgl. Definition 2.26). Hat M zumindest zwei Elemente, so ist diese Ordnung aber keine lineare Ordnung. Es ist „$\emptyset$" das kleinste Element, M das größte Element bezüglich „$\subseteq$" .

Bei echten partiellen Ordnungen gibt es Elemente, bei denen ein Größenvergleich fehlschlägt. Hat M zum Beispiel die Form $\{1, 2\}$, so sind die Mengen $\{1\}$ und $\{2\}$ bezüglich der Inklusionsbeziehung unvergleichbar[2].



Erhalten bleibt bei partiellen Ordnungen allerdings die folgende Eigenschaft: wenn zwei verschiedene Elemente bezüglich „$\leq$" vergleichbar sind, so legt die Ordnung stets eine eindeutige Reihenfolge zwischen den Elementen fest.

Beispiel 4.26 Es sei A eine Menge von Personen. Für $a \in A$ sei $f(a)$ die Größe der Person a, gemessen in cm. Mit „$\leq$" bezeichnen wir die übliche Ordnung auf $\mathbb{N}$. Für $a, b \in A$ definieren wir

$$a \preceq b \quad :\Leftrightarrow \quad f(a) \leq f(b).$$

Dann ist im allgemeinen „$\preceq$" eine Quasi-Ordnung, aber keine partielle Ordnung. Abbildung 4.6 illustriert den Zusammenhang. Die Funktion f repräsentiert die Messung der Körpergröße der Personen $1, \ldots, 4$. Die Personen 1 und 2 (resp. 3 und 4) haben dieselbe Körpergröße. Die Ordnung „$\preceq$" auf A ist durch Pfeile angedeutet. Sie wird die durch f und „$\leq$" *induzierte* Quasi-Ordnung auf A genannt. Offenkundig gilt $1 \preceq 2$ und $2 \preceq 1$, obwohl 1 und 2 verschieden sind. Daher verletzt „$\preceq$" die Antisymmetrie und ist keine partielle Ordnung.

[2]Wie immer fassen wir hier Zahlen nicht als Mengen auf.

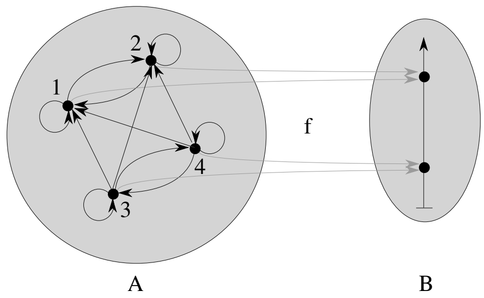


Abbildung 4.6: Durch Messung f induzierte Quasi-Ordnung.

Bei Quasi-Ordnungen kann es also vorkommen, daß wir zwei verschiedene Elemente zwar mittels der Ordnung vergleichen können, aber daraus trotzdem keine eindeutige Reihenfolge der Elemente erhalten. Die meisten in der Praxis auftretenden Quasi-Ordnungen (nicht alle) haben die Eigenschaft, daß man sogar stets zwei Elemente bezüglich der Ordnung vergleichen kann. Alle Arten von Messungen mit einer linearen Meßskala definieren Quasi-Ordnungen diesen Typs auf der Menge der zu messenden Objekte. Viele steigerbaren Adjektive (schneller, heißer, dicker, besser,...) lassen sich mit Quasi-Ordnungen dieses Typs assoziieren.

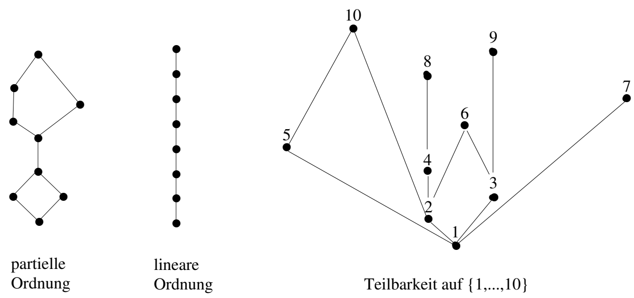
Definition 4.27 Es sei „$\leq$“ eine partielle Ordnung auf der Menge A. Das Element $b \in A$ heißt ein *Nachfolger* von $a \in A$ genau dann, wenn $a < b$. In dieser Situation heißt umgekehrt a ein *Vorgänger* von b. Gilt außerdem, daß es kein Element $c \in A$ gibt mit $a < c < b$, so heißt b ein *direkter Nachfolger* von a, und umgekehrt heißt a ein *direkter Vorgänger* von b.

Beispiele 4.28 Die nachfolgende umfangreiche Liste soll dazu dienen, die Konzepte zu vertiefen. Viele der nachfolgenden Beispiele sind aber auch von großer praktischer Bedeutung.

1. Bezeichnet „$\leq$“ die übliche Ordnung auf $\mathbb{N}$, so ist 0 das kleinste Element, für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist stets $n + 1$ der direkte Nachfolger von n. Bezeichnet „$\leq$“ hingegen die übliche Ordnung auf den reellen Zahlen, so hat kein Element einen direkten Nachfolger oder einen direkten Vorgänger bezüglich „$\leq$“ und es gibt kein minimales oder kleinstes Element.

2. Die Teilbarkeitsrelation T auf $\mathbb{N}$ (vgl. Beispiele 3.16 Nr. 3) beschreibt eine (echte) partielle Ordnung auf $\mathbb{N}$.

3. Endliche partielle Ordnungen lassen sich durch sogenannte *Hasse-Diagramme* darstellen. Ein solches Diagramm besteht aus einer endlichen Menge von Punkten, von denen einige durch Kanten verbunden sind. Man liest alle Kanten einheitlich von unten nach oben (horizontale Kanten sind nicht erlaubt), damit sind die Kanten implizit gerichtet. Die Punkte des Diagramms repräsentieren die Elemente einer Menge. Die Kanten definieren eine partielle Ordnung „$\leq$“ wie folgt: Für beliebige Elemente x und y gilt $x \leq y$ genau dann, wenn es einen aufsteigenden Kantenzug der Länge $n \geq 0$ von x nach y gibt. Einzelne Kanten stehen damit für die direkte Nachfolgerbeziehung bezüglich „$\leq$“.

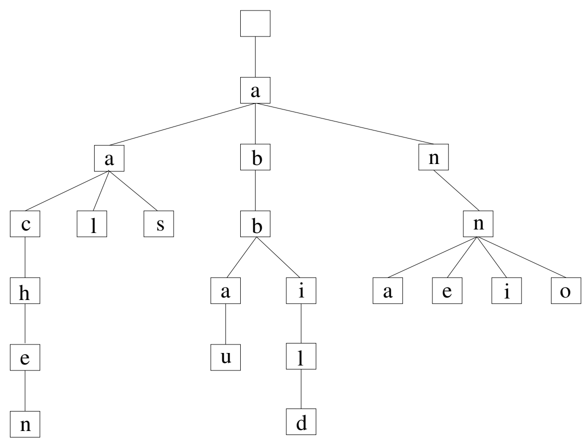


Wir werden unten zeigen, daß jede endliche partielle Ordnung „$\leq$“ durch ein Hasse-Diagramm dargestellt werden kann.

4. Es sei $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ein Alphabet, A^* bezeichne die in Definition 3.9 eingeführte Menge aller Wörter A. Für jede Teilmenge $W \subseteq A^*$ definiert

$$u \prec v \quad :\Leftrightarrow \quad u \text{ ist ein Präfix von } v$$

eine partielle Ordnung auf W, die *Präfixordnung* genannt wird. Wir betrachten den Fall genauer, wo W endlich und unter Präfixbildung abgeschlossen ist. Das Hasse-Diagramm hat hier die Form eines Baums. Der Baum, der sich für die Menge mit den Wörtern *a, aa, aac, aach, aache, aachen, aal, aar, aas, ab, abb, abbau, abbi, abbil, abbild, an, anna, anne, anno, anni* ergibt, ist in der nachfolgenden Figur (hier von oben nach unten gerichtet) dargestellt, wobei sich das einem Knoten η entsprechende Wort durch die Labels aller Knoten von der Wurzel bis zu η ergibt.



Ähnliche Bäume, sogenannte „Tries“, werden in der Informatik und Computerlinguistik zur internen Repräsentation von Wörterbüchern verwendet.

5. Die nun zu besprechende partielle Ordnung stellt eine Verfeinerung der Präfixordnung dar. Es sei $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ein Alphabet, das durch $a_1 <_A a_2 <_A \ldots <_A a_n$ geordnet sei. Es bezeichne A^* die in Definition 3.9 definierte Menge aller Wörter über dem Alphabet A. Dann wird durch

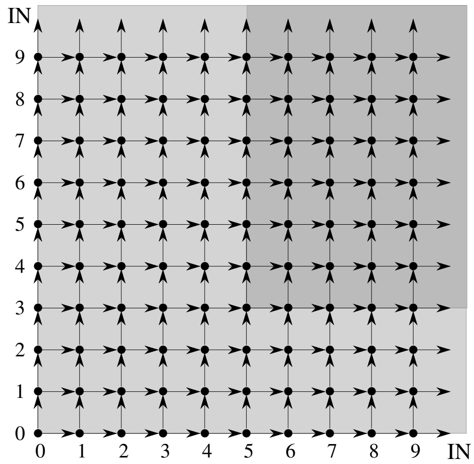
$$x_1 \ldots x_k \leq_L y_1 ... y_l :\Leftrightarrow \begin{cases} k \leq l \text{ und } x_1 = y_1, \ldots, x_k = y_k \\ \text{oder} \\ \text{es ex. } i,\ 0 \leq i < min(k,l) \text{ wo} \\ x_1 = y_1, \ldots, x_i = y_i \text{ und } x_{i+1} <_A y_{i+1} \end{cases}$$

eine lineare Ordnung auf A^* definiert, die *lexikographische Ordnung* von A^* genannt wird. Es handelt sich um die übliche Wortreihenfolge in Lexika, Telefonbüchern etc. Die Wortliste *a, aa, aac, aach, aache, aachen, aal, aar, aas, ab, abb, abbau, abbi, abbil, abbild, an, anna, anne, anno, anni* ist lexikographisch geordnet.

6. Ist „$\leq$“ eine partielle (lineare) Ordnung auf der Menge M, und definiert man $a \geq b :\Leftrightarrow b \leq a$, so wird durch „$\geq$“ eine partielle (lineare) Ordnung auf M definiert, die die zu „$\leq$“ *duale Ordnung* heißt.

7. Es sei $M = A_1 \times \ldots \times A_n$ ein kartesisches Produkt. Wenn wir auf jeder der „Faktormengen“ A_i eine partielle Ordnung „$\leq_i$” haben, so können wir auf M wie folgt eine partielle Ordnung $\leq_M$ definieren. Für $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ und $\langle a'_1, \ldots, a'_n \rangle \in M$ setzen wir $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \leq_M$

$\langle a'_1, \ldots, a'_n \rangle$ genau dann, wenn $a_i \leq_i a'_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Die Ordnung $\leq_M$ wird oft als *Produktordnung* der Ordnungen $\leq_1, \ldots, \leq_n$ bezeichnet. Die nachfolgende Abbildung gibt die Produktordnung auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ an, wobei die natürliche Ordnung auf $\mathbb{N}$ die jeweilige Komponentenordnung darstellt. Pfeile deuten die zwei direkten Nachfolger eines Elements bezüglich der Produktordnung an, die Menge aller Nachfolger von $\langle 5, 3 \rangle$ zusammen mit $\langle 5, 3 \rangle$ ist dunkel hinterlegt.



8. Sind A, B Mengen und ist „$\leq_B$“ eine partielle Ordnung auf B, so definiert
$$f \trianglelefteq g \quad :\Leftrightarrow \quad (\forall a \in A\colon f(a) \leq_B g(a))$$
eine partielle Ordnung auf der Menge B^A aller Abbildungen von A nach B. Der Leser möge sich überlegen, warum dieses Beispiel das vorausgegangene verallgemeinert.

9. Wir können Beispiel 4.26 wie folgt verallgemeinern. Es sei „$\leq$“ eine partielle Ordnung auf der Menge B und $f\colon A \to B$ eine Funktion. Auf A definieren wir die Relation „$\preceq$“ durch
$$a_1 \preceq a_2 \quad :\Leftrightarrow \quad f(a_1) \leq f(a_2).$$
Dann ist „$\preceq$“ eine Quasi-Ordnung, aber im allgemeinen keine partielle Ordnung. Es heißt „$\preceq$“ die durch f und „$\leq$“ *induzierte* Quasi-Ordnung auf A.

10. Ist A eine Menge von Personen und bezeichnen wir mit E^+ die „Vorfahrbeziehung“ auf A, so ist E^+ eine strikte partielle Ordnung, aber im allgemeinen keine strikte lineare Ordnung.

11. Die Menge aller Äquivalenzrelationen auf einer Menge A wird durch die Verfeinerungsrelation partiell geordnet.

Weiter oben hatten wir dargestellt, daß der prinzipielle Unterschied zwischen echten Quasi-Ordnungen und partiellen Ordnungen darin besteht, daß bei Quasi-Ordnungen ein Vergleich zweier vergleichbarer Elemente möglicherweise keine eindeutige Reihenfolge der Elemente ergibt. Wir stellen nun die Frage, ob es möglich ist, ausgehend von einer beliebigen Quasi-Ordnung „$\preceq$“ auf einer Menge A zu einer „vereinfachten Repräsentation“ dieser Ordnung zu kommen, wo sich dieser unschöne Effekt in Luft auflöst. Dies führt uns auf eine nützliche Verwendungsweise von Äquivalenzrelationen, die uns auch später noch verschiedentlich begegnen wird. Die Idee besteht darin, daß daß man eine geeignete Äquivalenzrelation „$\sim$“ auf A einführt und zur Quotientenmenge $A/\sim$ (vgl. Def. 4.8) übergeht. Diese Menge kann man als eine Vereinfachung der Menge A ansehen, da wir sie durch „Identifizieren“ von Elementen aus A erhalten. Im Anschluß wird dann eine Ordnung „$\leq$“ auf $A/\sim$ eingeführt, die ihrerseits eine Vereinfachung von „$\preceq$“ darstellt und nun tatsächlich eine partielle Ordnung ist.

Beispiel 4.29 Wir wählen das Beispiel aus Abbildung 4.6 zum Ausgangspunkt. Bei Betrachten der Menge A fällt auf, daß alle Elemente der Teilmenge $\{1, 2\}$ wechselseitig in der Relation „$\preceq$“ stehen. Dasselbe gilt für die Elemente der Teilmenge $\{3, 4\}$. Wenn wir die nicht umkehrbaren Pfeile ignorieren, erhalten wir also eine Äquivalenzrelation, man rufe sich hierzu die Diskussion in Beispiel 4.14 und Figur 4.3 in Erinnerung! Zu beachten ist, daß gerade der Vergleich der Elemente 1 und 2 (analog 3 und 4) problematisch ist, da er zu keiner eindeutigen Reihenfolge zwischen 1 und 3 (analog 3 und 4) führt. Wenn wir nun wie in Beispiel 4.14 zur Quotientenmenge $A/\sim$ übergehen, so werden durch die kanonische Abbildung κ die problematischen Paare jeweils identifiziert. Es bleibt noch die Aufgabe zu lösen, auf $A/\sim$ eine Ordnung „$\leq$ einzuführen, die „$\preceq$“ in geeigneter Weise widerspiegelt und eine partielle Ordnung ist. Es gibt nur eine natürliche Weise: da *jedes* Element von $[3] = \{3, 4\}$ bezüglich „$\preceq$“ kleiner ist als *jedes* Element von $[1] = \{1, 2\}$ definieren wir $[3] < [1]$. Das Vorgehen ist in Abbildung 4.7 illustriert.

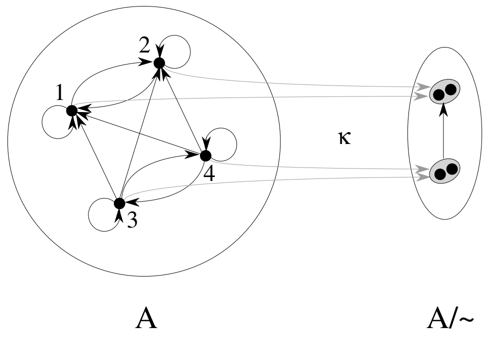


Abbildung 4.7: Übergang von einer Quasi-Ordnung zu vereinfachter partieller Ordnung durch Quotientenbildung.

Im nachfolgenden Lemma wird dieses Beispiel verallgemeinert. Das Lemma zeigt auch, daß bei geeigneter Betrachtungsweise jede Quasi-Ordnung durch eine Abbildung auf eine partiell geordnete Menge induziert ist im Sinn von Beispiel 4.28 Nr. 9. Ein wichtiges technisches Detail beim Beweis ist das folgende. Wir führen unten eine Relation zwischen Äquivalenzklassen dadurch ein, daß wir geeignete Bedingung an „die" Vertreter der Äquivalenzklassen stellen. Nun sind im allgemeinen die Vertreter gar nicht eindeutig bestimmt, da es ja viele Elemente in den Äquivalenzklassen gibt. In einem solchen Fall muß man sicherstellen, daß die Auswertung der Bedingung *nicht von der Wahl der Vertreter abhängt.* Wenn man für jede Auswahl von Vertretern stets dasselbe Resultat erhält, sagt man, daß die so eingeführte Relation *wohldefiniert* ist.

Lemma 4.30 *Es sei „$\preceq$" eine Quasi-Ordnung auf der Menge A. Dann wird durch*

$$a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad (a \preceq b \ \wedge \ b \preceq a)$$

eine Äquivalenzrelation auf A definiert. Auf der Quotientenmenge $A/\sim$ sei die Relation „$\leq$" durch

$$[a] \leq [b] \quad :\Leftrightarrow \quad a \preceq b$$

erklärt. Dann ist „$\leq$" wohldefiniert und eine partielle Ordnung.

Beweis. Wir gehen nur auf die Wohldefiniertheit ein, der restliche Beweis bleibt als Übung. Es seien $[a_1] = [a_2]$ und $[b_1] = [b_2]$ Äquivalenzklassen in $A/\sim$. Wir müssen zeigen, daß wir dasselbe Resultat erhalten, wenn wir zur Definition von „$\leq$“ einerseits $[a_1]$ und $[b_1]$, andererseits $[a_2]$ und $[b_2]$ verwenden. In anderen Worten: es ist hier zu zeigen, daß die Bedingungen $a_1 \preceq b_1$ und $a_2 \preceq b_2$ äquivalent sind. Wegen der Symmetrie der Behauptung reicht es zu zeigen, daß aus $a_1 \preceq b_1$ auch $a_2 \preceq b_2$ folgt. Es gelte also $a_1 \preceq b_1$. Wegen $[a_1] = [a_2]$ und $[b_1] = [b_2]$ gelten auch die folgenden Beziehungen: $a_2 \preceq a_1$ and $b_1 \preceq b_2$. Wegen der Transitivität von „$\preceq$“ folgt nun $a_2 \preceq b_2$. ■

Wenn wir wie in Definition 4.11 mit κ die kanonische Abbildung von A in die Quotientenmenge $A/\sim$ bezeichnen, so ist in der obigen Situation „$\preceq$“ genau die durch κ und „$\leq$“ induzierte Quasi-Ordnung auf A. Das nachfolgende Lemma verdeutlicht nochmals den Unterschied zwischen Quasi-Ordnungen und partiellen Ordnungen aus einer anderen Perspektive.

Lemma 4.31 *Es sei „$\leq$“ eine Quasi-Ordnung auf der Menge A. Dann ist „$\leq$“ eine partielle Ordnung genau dann, wenn A keine nicht-trivialen $\leq$–Zyklen (vgl. Definition 3.28) enthält.*

Beweis. Es sei „$\leq$“ eine partielle Ordung, somit antisymmetrisch. Es sei $a_0, \dots, a_n$ ein $\leq$–Zyklus. Somit gilt $a_0 = a_n$. Wäre der Zyklus nicht-trivial, so enthielte er ein Element $a_i \neq a_0$. Aus der Transitivität von „$\leq$“ folgte einerseits $a_0 \leq a_i$, andererseits auch $a_i \leq a_n = a_0$. Nunmehr ergibt sich aber ein Widerspruch zur Antisymmetrie: wir haben $a_0 \leq a_i$, $a_i \leq a_0$ und $a_i \neq a_0$. Der Widerspruch zeigt, daß der Zyklus $a_0, \dots, a_n$ trivial sein muß.

Nun nehmen wir umgekehrt an, daß A keine nicht-trivialen $\leq$–Zyklen enthält. Dann muß „$\leq$“ antisymmetrisch sein: andernfalls gäbe es Elemente $a_0, a_1 \in A$ mit $a_0 \leq a_1$ und $a_1 \leq a_0$ sowie $a_0 \neq a_1$. Dann wäre die Folge a_0, a_1, a_0 ein nicht-trivialer $\leq$–Zyklus. ■

Im ersten Teil des Beweises haben wir die Trivialität des betrachteten Zyklus dadurch bewiesen, daß wir aus der *gegenteiligen Annahme* einen *Widerspruch zur Voraussetzung*, daß $\leq$ eine partielle Ordnung ist, hergeleitet haben. Man nennt diese Technik „Beweis durch Kontraposition“. Aus Lemma 4.31 ergibt sich sofort

Lemma 4.32 *Es sei „$\leq$“ eine partielle Ordnung auf der nichtleeren endlichen Menge A. Dann besitzt A ein bezüglich „$\leq$“ minimales Element und ein bezüglich „$\leq$“ maximales Element.*

Beweis. Da $A \neq \emptyset$ können wir ein Element $a_0 \in A$ wählen. Wenn a_0 minimal ist, sind wir fertig. Wenn a_0 nicht minimal ist, so gibt es ein Element $a_1 < a_0$. Solange wir kein minimales Element gefunden haben, fahren wir auf diese Weise fort. Da A endlich ist und keine nicht-trivialen „$\leq$“–Zyklen enthält, müssen wir nach endlich viele Schritten bei einem minimalen Element angelangen. Wenn wir dieselbe Methode auf die duale Ordnung „$\geq$“ anwenden, erreichen wir ein minimales Element bezüglich „$\geq$“, also ein maximales Element bezüglich „$\leq$“. ■

Lemma 4.33 *Jede partielle Ordnung „$\leq$“ auf einer endlichen Menge A läßt sich als Hasse-Diagramm darstellen.*

Beweis. Induktion über die Zahl n der Elemente von A.

Induktionsanfang, $n = 0$. In diesem Fall ist „$\leq$“ die leere Menge $\emptyset$, wir nehmen das leere Diagramm zur Repräsentation.

Induktionshypothese. Sein $n \geq 0$. Die Behauptung sei richtig für jede Menge A mit n Elementen.

Induktionsschritt. Es sei A eine Menge mit $n + 1$ Elementen ($n \geq 0$) und „$\leq$“ eine partielle Ordnung auf A. Wir wählen gemäß Lemma 4.32 ein „$\leq$“-minimales Element a. Die Einschränkung von „$\leq$“ auf $A \setminus \{a\}$ ist offenkundig eine partielle Ordnung. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt diese ein Hasse-Diagramm. Wir fügen zu diesem einen Punkt hinzu, der das Element a repräsentiert, desweiteren Kanten von a zu jedem direkten Nachfolger von a. Offenkundig erhalten wir damit ein Hasse-Diagramm für „$\leq$“. ■

Ähnlich läßt sich zeigen:

Lemma 4.34 *Es sei A eine endliche Menge. Jede partielle Ordnung „$\leq_p$“ auf A läßt sich zu einer linearen Ordnung „$\leq$“ mit „$\leq_p$“ $\subseteq$ „$\leq$“ ergänzen.*

Beweis. Übung. ■

4.4 Hüllenbildungen bei Relationen

Im vorausgegangenen Abschnitt hatten wir in Lemma 4.30 und in der zugehörigen Abbildung 4.7 an einem Beispiel gesehen, daß man manchmal durch den Übergang zur Quotientenmenge die Eigenschaften von Relationen angenehmer machen kann. In diesem Abschnitt geht es auch darum, wie man von einer Relation, die bestimmte wünschenswerte Eigenschaften nicht besitzt, zu einer verwandten Relation übergehen kann, die besser geartet ist. Die Idee ist diesmal, die Relation solange systematisch zu erweitern, bis die gewünschte Eigenschaft erreicht ist. Formal erreicht wird dies durch sogenannte Hüllenabbildungen. Von großer Bedeutung ist vor allem der unten eingeführte Begriff der (reflexiv-) transitiven Hülle einer Relation, auf den wir ausführlich eingehen. Da das Konzept der Hüllenbildung in sehr vielen Zusammenhängen nützlich ist, stellen wir zu Beginn kurz den allgemeinen Begriff vor.

Definition 4.35 Als *Hüllenabbildung* werden Abbildungen $H\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ bezeichnet, die einer Menge $A \subseteq M$ eine Menge $H(A) \subseteq M$ (ihre „Hülle“) zuordnen derart, daß drei Bedingungen erfüllt sind:

(i) Es gilt stets $A \subseteq H(A)$ (Erweiterungseigenschaft),

(ii) $A \subseteq B$ impliziert stets $H(A) \subseteq H(B)$ (Monotonie),

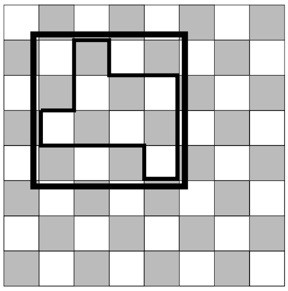
(iii) es gilt stets $H(H(A)) = H(A)$ (Idempotenz).

Hierbei ist M eine beliebige Menge. Ist $A \subseteq M$ und gilt $H(A) = A$, so wird A ein *Fixpunkt* der Hüllenabbildung H genannt.

Beispiel 4.36 Bezeichnet $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen, und ist M_1 die Potenzmenge von $\mathbb{R}$, so ist für $A \in M_1$ die Menge

$$I_1(A) := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a_1, a_2 \in A\colon a_1 \leq x \leq a_2\}$$

das kleinste A umfassende „Intervall“ von $\mathbb{R}$. Die Abbildung $I_1\colon M_1 \to M; A \mapsto I_1(A)$ ist eine Hüllenabbildung. Intervallbasierte Hüllenabbildungen gibt es auch in höheren Dimensionen, wie die nachfolgende Abbildung andeutet, wo wir einer gegebenen Fläche das kleinste sie umfassende Planrechteck als Hülle zuordnen. In der Tat kann man Planrechtecke als zweidimensionale Intervalle betrachten.



Es ist trivial zu zeigen, daß für jede Hüllenabbildung $H\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ stets die Grundmenge M selbst ein Fixpunkt von H ist. Interessanter ist der folgende Zusammenhang, der zeigt, daß Fixpunkte unter Durchschnittsbildung abgeschlossen sind.

Lemma 4.37 *Es sei $H\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ eine Hüllenabbildung und I eine nichtleere Indexmenge. Ist $A_i \subseteq M$ für jeden Index $i \in I$ ein Fixpunkt von H, so ist auch $\bigcap_{i\in I} A_i$ ein Fixpunkt von H.*

Beweis. Es sei A_i für jeden Index $i \in I$ ein Fixpunkt von H, es gelte also $H(A_i) = A_i$. Aufgrund der Erweiterungseigenschaft von H folgt

$$\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq H(\bigcap_{i\in I} A_i).$$

Sei nun $j \in I$. Aus $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_j$ ergibt sich aufgrund der Monotonie $H(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq H(A_j) = A_j$. Da diese Inklusion für jeden Index j gilt, folgt

$$H(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i.$$

Mit Lemma 2.6, Teil 2, erhält man $H(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} A_i$. Damit ist $\bigcap_{i\in I} A_i$ ein Fixpunkt von H. ■

Man kann bei Vorliegen einer Durchschnittseigenschaft ähnlich zu der in Lemma 4.37 genannten auch umgekehrt hieraus eine geeignete Hüllenabbildung definieren. Hierzu vergleiche man Aufgabe 4.28.

Die Diskussion der Hüllenbildungen bei Relationen beginnen wir mit einer Vorbemerkung: Es sei $S \subseteq A \times A$ eine zweistellige Relation auf der Menge A. Es ist $A \times A$ eine S umfassende reflexive, symmetrische und transitive Relation. Aus Lemma 4.4 ergibt sich sofort, daß der Durchschnitt aller

S umfassender reflexiver (resp. symmetrischer, transitiver) Relationen auf der Menge A stets selbst eine S umfassende reflexive (resp. symmetrische, transitive) Relation auf A ist. Daher macht die nachfolgende Definition Sinn.

Definition 4.38 Es sei R eine zweistellige Relation auf der Menge A.

1. Die *reflexive Hülle* von von R ist die Relation
$$\bigcap\{S \subseteq A \times A \mid R \subseteq S, S \text{ reflexiv}\}.$$
2. Die *symmetrische Hülle* von von R ist die Relation
$$\bigcap\{S \subseteq A \times A \mid R \subseteq S, S \text{ symmetrisch}\}.$$
3. Die *transitive Hülle* von von R ist die Relation
$$R^+ := \bigcap\{S \subseteq A \times A \mid R \subseteq S, S \text{ transitiv}\}.$$
4. Die *reflexiv-transitive Hülle* von von R ist die Relation
$$R^* := \bigcap\{S \subseteq A \times A \mid R \subseteq S, S \text{ reflexiv und transitiv}\}.$$

Offenkundig ist die reflexive (resp. symmetrische, transitive, reflexiv-transitive) Hülle von R genau die kleinste R umfassende reflexive (resp. symmetrische, transitive, reflexive und transitive) Relation auf A. Es ist leicht zu zeigen, daß die Abbildung, die einer gegebenen Relation $R \subseteq A \times A$ ihre reflexive (resp. symmetrische, transitive, reflexiv-transitive) Hülle zuordnet, in der Tat eine Hüllenabbildung $H\colon \mathcal{P}(A \times A) \to \mathcal{P}(A \times A)$ im Sinn von Definition 4.35 ist, hierzu vergleiche Aufgabe 4.25.

Bemerkung 4.39 Aus der Tatsache, daß man den Übergang von einer Relation $R \subseteq A \times A$ zu ihrer reflexiven (resp. symmetrischen, transitiven) Hülle jeweils als Hüllenabbildung interpretieren kann, kann man ersehen, daß die drei Aussagen aus Lemma 4.4 lediglich Spezialfälle des in Lemma 4.37 ausgedrückten allgemeinen Sachverhalts sind. Hierzu muß man nur bemerken, daß jede reflexive (resp. symmetrische, transitive) Relation R ein Fixpunkt der entsprechenden Hüllenabbildung ist. Man vergleiche Aufgabe 4.27. Auch der Übergang von einer Relation $R \subseteq A \times A$ zur kleinsten R umfassenden Äquivalenzrelation ist eine Hüllenabbildung. Damit entpuppt sich auch Lemma 4.17 ein Spezialfall von Lemma 4.37.

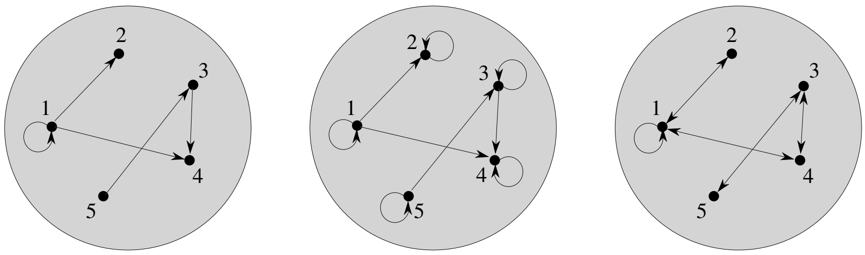


Abbildung 4.8: Reflexive (Mitte) und symmetrische Hülle (rechts) einer binären Relation (links).

Eine explizite Beschreibung der reflexiven und der symmetrischen Hülle liefert das folgende Lemma.

Lemma 4.40 *Es sei $R \subseteq A \times A$ wie oben. Dann ist $Id_A \cup R$ die reflexive Hülle von R und $R \cup R^{-1}$ die symmetrische Hülle von R.*

Beweis. Es ist unmittelbar klar, daß $Id_A \cup R$ eine R umfassende reflexive Relation ist, und daß jede Relation mit diesen beiden Eigenschaften $Id_A \cup R$ als Teilmenge enthält. Damit gilt $Id_A \cup R = \bigcap\{S \subseteq A \times A \mid R \subseteq S, S \text{ reflexiv}\}$. Analog ist die Argumentation im Fall der symmetrischen Hülle. ■

Für einen Beweis unter Verwendung von Lemma 4.3 vergleiche man Aufgabe 4.29. Abbildung 4.8 illustriert die reflexive und transitive Hülle einer Relation einer Relation R. Im Matrixbild ergibt sich die reflexive Hülle von R durch Auffüllen der Diagonalen mit Einträgen 1 (Mitte), die symmetrische Hülle durch Spiegeln aller Einträge 1 an der Diagonalen unter Beibehaltung der bisherigen Einträge 1 (rechts).

R	1	2	3	4	5
1	1	1	0	1	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0

	1	2	3	4	5
1	1	1	0	1	0
2	0	1	0	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	0	0	1	0
5	0	0	1	0	1

	1	2	3	4	5
1	1	1	0	1	0
2	1	0	0	0	0
3	0	0	0	1	1
4	1	0	1	0	0
5	0	0	1	0	0

Definition 4.41 Es sei R eine binäre Relation auf der Menge A. Eine Relation $S \subseteq A \times A$ heißt *abgeschlossen unter Komposition mit R* (kurz: abgeschlossen unter R) genau dann, wenn $S \circ R \subseteq S$ gilt.

Transitive Hülle und reflexiv-transitive Hülle liefern zwei wichtige Beispiele einer Relation, die unter Komposition mit R abgeschlossen ist. Die nachfolgende Bemerkung gibt explizite Beschreibungen der transitiven Hülle und der reflexiv-transitiven Hülle mittels der in Abschnitt 3.6.1 besprochenen induktiven Definition von Mengen.

Bemerkung 4.42 Es sei R wie oben. Dann können wir die transitive Hülle R^+ induktiv wie folgt definieren. Als Basisregel nehmen wir $R \subseteq R^+$. Die einzige induktive Regel besagt:

Gilt $\langle a, b\rangle \in R^+$ und $\langle b, c\rangle \in R$, so ist $\langle a, c\rangle \in R^+$.

Kürzer können wir schreiben

$$R^+ \ ::= \ R \mid R^+ \circ R.$$

Wenn wir in die Abschnitt 3.6.1 erläuterte schrittweise Turmkonstruktion der definierten Menge durchführen, erhalten wir zunächst R, danach $R \cup R^2$, im dritten Schritt $R \cup R^2 \cup R^3$ etc. Daraus ergibt sich

$$R^+ = \bigcup_{n\geq 1} R^n.$$

Ein formaler Beweis der Gleichung, daß die induktiv definierte Menge $\bigcup_{n\geq 1} R^n$ tatrsächlich die transitive Hülle R^+ von R ist, ergibt sich wie folgt: gemäß Definition der transitiven Hülle gilt $R \subseteq R^+$. Da R^+ überdies transitiv ist, folgt mit Teil 3 aus Lemma 4.3 (wo R^+ an die Stelle von R tritt) $R^+ \circ R^+ \subseteq R^+$. Mit Teil 1 aus Lemma 3.26 ergibt sich hieraus $R \circ R \subseteq R^+$. Nun folgt analog

$$R \circ R \circ R \subseteq R^+ \circ R \subseteq R^+ \circ R^+ \subseteq R^+.$$

Eine einfache Induktion zeigt, daß $R^n \subseteq R^+$ für alle $n \geq 1$ und somit

$$\bigcup_{n\geq 1} R^n \subseteq R^+.$$

Andererseits folgt mit den Teilen 2 und 3 aus Lemma 3.26

$$\begin{aligned}
(\bigcup_{n\geq 1} R^n) \circ (\bigcup_{m\geq 1} R^m) &= \bigcup_{m\geq 1} ((\bigcup_{n\geq 1} R^n) \circ R^m) \\
&= \bigcup_{m\geq 1} (\bigcup_{n\geq 1} (R^n \circ R^m)) \\
&\subseteq \bigcup_{n\geq 1} R^n.
\end{aligned}$$

Daraus folgt mit Teil 3 aus Lemma 4.3, daß $\bigcup_{n\geq 1} R^n$ bereits transitiv ist. Offenkundig gilt $R = R^1 \subseteq \bigcup_{n\geq 1} R^n$. Da somit $\bigcup_{n\geq 1} R^n$ eine R umfassende transitive Relation ist, folgt

$$R^+ \subseteq \bigcup_{n\geq 1} R^n$$

und zusammen mit $\bigcup_{n\geq 1} R^n \subseteq R^+$ nun $R^+ = \bigcup_{n\geq 1} R^n$. ∎

Bemerkung 4.43 Die induktive Definition der reflexiv-transitiven Hülle ist ähnlich. Als Basisregel nehmen wir $Id_A \subseteq R^*$. Die einzige induktive Regel besagt:

Gilt $\langle a, b\rangle \in R^*$ und $\langle b, c\rangle \in R$, so ist $\langle a, c\rangle \in R^*$.

Kürzer können wir schreiben

$$R^* \;::=\; Id_A \mid R^* \circ R.$$

Wenn wir wieder die schrittweise Konstruktion durchführen, erhalten wir nacheinander Id_A, danach $Id_A \circ \cup R = R = R^1$, daraufhin $Id_A \cup R^1 \cup R^2$ etc. Setzen wir $R^0 := Id_A$ so gilt also

$$R^* = \bigcup_{n\geq 0} R^n.$$

Der Beweis, daß die Menge $\bigcup_{n\geq 0} R^n$ in der Tat die reflexiv-transitive Hülle R^* ist, kann auf ähnliche Weise wie für die transitive Hülle geführt werden (Aufgabe 4.35). ∎

Eine weitere Beschreibung von transitiver und reflexiv-transitiver Hülle folgt unmittelbar aus Lemma 3.29:

Lemma 4.44 *Es sei R eine zweistellige Relation auf der Menge A. Dann gilt $R^+ = \{\langle a, b\rangle \in A \times A \mid \exists$ R-Kette der Länge $n \geq 1$ von a nach $b\}$ und $R^* = \{\langle a, b\rangle \in A \times A \mid \exists$ R-Kette der Länge $n \geq 0$ von a nach $b\}$.*

Beispiele 4.45 Einige Illustrationen sollen das Konzept der transitiven und der reflexiv-transitiven Hülle verdeutlichen.

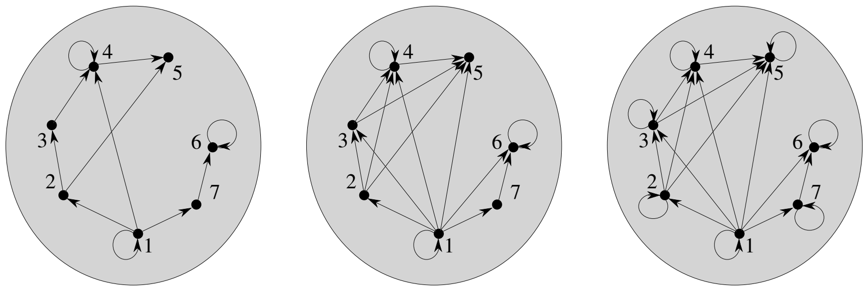


Abbildung 4.9: Transitive und reflexiv-transitive Hülle einer Relation.

1. Wenn die Relation $R \subseteq A \times A$ durch gerichtete Pfeile symbolisiert ist, so gehört ein Paar—nicht notwendig verschiedener—Punkte $\langle a, b \rangle$ genau dann zu R^*, wenn man von a nach b auf einem Weg gelangen kann, wo man immer geeigneten Pfeilen in der angegebenen Richtung folgt. Die Weglänge 0 ist hierbei möglich, alle Paare $\langle a, a \rangle$ gehören stets zu R^*. Bei der transitiven Hülle R^+ muß man zumindest einen R-Pfeil entlang laufen, wobei dieser allerdings durchaus wieder beim Ausgangselement enden kann. In Figur 4.9 ist links die Relation R, in der Mitte ihre transitive Hülle und rechts die reflexiv-transitive Hülle abgebildet.

2. Ist A eine Menge von Personen, und gibt E (resp. K) wie in Beispiel 3.16 Nr. 6 die Elternbeziehung und $K = E^{-1}$ die „ist-Kind-von" Beziehung an, so ist E^+ die Vorfahrbeziehung und K^+ die Nachfahrbeziehung.

3. Wenn R_L wie in den Beispielen 3.16 und 3.18 diejenige Relation ist, die die möglichen Zielfelder eines Läufers auf dem ansonsten leeren Schachbrett bei einem einzelnen Zug beschreibt, so umfaßt R_L^* alle Felderpaare, die zwei nicht notwendig verschiedene Felder derselben Farbe (schwarz oder weiß) enthalten. Etwas weniger trivial ist das Springerbeispiel. Ist R_S diejenige Relation, die die möglichen Zielfelder eines Springers auf dem ansonsten leeren Schachbrett bei einem einzelnen Zug beschreibt, so umfaßt R_S^* alle Felderpaare (vgl. Aufgabe 4.33).

4. Es sei A eine Menge von Punkten in einer Stadt, die Relation R gelte für $\langle a, b \rangle \in A \times A$ genau dann, wenn es eine direkte Busverbindung von a nach b gibt. Dann beschreibt die Relation R^* diejenigen Paare $\langle a, x \rangle$, wo es irgendeine Busverbindung — mit oder ohne Umsteigen, gegebe-

nenfalls ohne überhaupt zu fahren — von a nach x gibt. Insbesondere gehört die „Diagonale" $\{\langle a, a\rangle \mid a \in A\}$ von $A \times A$ zu R^*.

5. Es sei $R := \{\langle n, n+1\rangle \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid n \geq 0\}$ die Nachfolgerrelation auf den natürlichen Zahlen. Dann beschreibt R^* gerade die übliche Ordnung „$\leq$" auf $\mathbb{N}$.

6. Als Variante des vorausgegangenen Beispiels gilt folgendes: bezeichnet R die direkte Nachfolgerbeziehung der partiellen Ordnung „$\leq$" auf der endlichen Menge M, so stimmen R^* (resp. R^+) und „$\leq$" (resp. „$<$") überein (Aufgabe 4.36).

Unser letztes Beispiel ist etwas komplizierter, verdeutlicht aber die grundsätzliche Bedeutung des Begriffs der reflexiv-transitiven Hülle im Zusammenhang mit sogenannten *Ableitungen* bei formalen Systemen.

Beispiel 4.46 Es sei M das Alphabet mit den Symbolen $\{S, A, B, a, b\}$. Das Symbol S bezeichnen wir als *Startsymbol*, die Symbole S, A und B nennen wir *nichtterminale Symbole*, die Buchstaben a und b nennen wir *terminale Symbole*. Wie üblich bezeichne M^* die Menge aller Wörter über M (vgl. Definition 3.9). Wir betrachten die „Ein-Schritt-Ableitungsrelation" R auf M^*, die alle Paare der Form $\langle uSv, uASBv\rangle$, $\langle uSv, uv\rangle$, $\langle uAv, uav\rangle$ und $\langle uBv, ubv\rangle$ enthält. Hierbei bezeichnen u und v jeweils beliebige Wörter aus M^*. R kann als eine einfache formale *Grammatik* aufgefaßt werden. Ist $\langle S, u\rangle \in R^*$, so sagen wir, daß das Wort u (in endlich vielen Schritten) aus S *ableitbar* ist. Beispiele für Ableitungen sind

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow \epsilon, \\
S &\rightarrow ASB \rightarrow AB \rightarrow aB \rightarrow ab, \\
S &\rightarrow ASB \rightarrow AASBB \rightarrow AABB \rightarrow aABB \rightarrow aAbB \rightarrow aabB \rightarrow aabb
\end{aligned}$$

wo „ϵ" das leere Wort bezeichnet. Man beachte, daß jeweils jedes Paar aufeinanderfolgender Wörter zu R gehört. Damit gilt in der Tat $\langle S, \epsilon\rangle, \langle S, ab\rangle, \langle S, aabb\rangle \in R^*$. Die Menge $\{u \in \{a, b\}^* \mid \langle S, u\rangle \in R^*\}$ heißt die durch die Grammatik erzeugte *Sprache*. Sie umfaßt bei unseren Beispiel genau alle Wörter der Form $a^n b^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Ähnliche Grammatiken werden zur Beschreibung von natürlichen Sprachen und Programmiersprachen verwendet. Das Beispiel zeigt, wie es mittels des Begriffs der reflexiv-transitiven Hülle möglich ist, trotz der endlichen Darstellung der Relation R eine unendliche Menge möglicher Ableitungen und damit eine unendliche Sprache zu charakterisieren. Ähnliche Formen der Ableitung treten bei vielen verwandten Grammatiken und verwandten formalen Systemen auf und werden in aller Regel mit Hilfe des Begriffs der reflexiv-transitiven Hülle einer „Ein-Schritt-Ableitungsrelation“ charakterisiert.

4.5 Ergänzung: Fundierte Ordnungen, wohlfundierte Induktion

Eine spezielle Klasse von Ordnungen, die viele Anwendungen besitzt, sind die sogenannten fundierten (auch: wohlfundierten) Ordnungen. Der Fundiertheitsbegriff für Quasi-Ordnungen ist etwas unübersichtlich, wir beschränken uns einfachheitshalber auf partielle und lineare Ordnungen.

Definition 4.47 Eine partielle Ordnung „$\leq$“ auf einer Menge A heißt *fundiert* genau dann, wenn jede nichtleere Teilmenge B von A ein bezüglich „$\leq$“ minimales Element enthält. Eine fundierte lineare Ordnung wird als *Wohlordnung* bezeichnet.

Die Fundiertheit einer partiellen Ordnung „$\leq$“ bedeutet, daß es keine unendlich absteigenden Ketten von Elementen $\cdots < a_{n+1} < a_n < \cdots a_2 < a_1 < a_0$ gibt (Übungsaufgabe 4.38). Der Begriff der fundierten partiellen Ordnung erlaubt eine Verallgemeinerung des Induktionsprinzips als Beweisprinzip, und parallel hierzu eine Verallgemeinerung des Prinzips der induktiven Definition von Mengen. Wir deuten kurz die Idee des verallgemeinerten Induktionsbeweises an.

Lemma 4.48 (Prinzip der wohlfundierten Induktion) *Es sei „$\leq$“ eine fundierte partielle Ordnung auf der Menge A. Es beschreibe φ eine Eigenschaft, die auf Elemente von A zutrifft oder nicht. Gilt*

(†) *jedes Element $a \in A$ besitzt die Eigenschaft φ, sobald alle Elemente aus der Menge der Vorgänger $\{b \in A \mid b < a\}$ die Eigenschaft φ besitzen,*

so haben alle Elemente aus A die Eigenschaft φ.

Beweis. Angenommen es gibt ein Element $a \in A$, das die Eigenschaft φ nicht besitzt. Wir betrachten die Teilmenge E von A, die all diejenigen Elemente enthält, die nicht die Eigenschaft φ besitzen. E ist nichtleer, da a nach Annahme zu E gehört. Wegen der Fundiertheit muß es ein „$\leq$“-minimales Element e_0 in E geben. Alle Elemente der Vorgängermenge $\{b \in A \mid b < e_0\}$ erfüllen damit φ nach Wahl von e_0. Aus der Voraussetzung (†) folgt jetzt aber, daß e_0 selbst die Eigenschaft φ besitzt. Dies stellt einen Widerspruch dar, damit müssen alle Elemente $a \in A$ die Eigenschaft φ besitzen. ■

Das (hypothetische) Element e_0 aus dem vorangegangenen Beweis wird oft als der „kleinste Verbrecher“ bezeichnet, der durch Herleitung des Widerspruchs „gehängt“ wird. Man spricht dann von der „Methode des kleinsten Verbrechers“. Das Prinzip der vollständigen Induktion ergibt sich als der Spezialfall, wo $A = \mathbb{N}$ ist und „$\leq$“ die übliche Wohlordnung auf $\mathbb{N}$.

In der Informatik spielt die Fundiertheit von Ordnungen eine große Rolle bei Terminierungsbeweisen, wenn es also darum geht, zu zeigen, daß ein Algorithmus für jede erlaubte Eingabe nach endlich vielen Schritten stoppt. Dabei bildet man die Zustände, die sich durch die Eingabe oder als Ergebnisse der Rechenschritte ergeben, auf passende Elemente einer Menge mit einer fundierten partiellen Ordnung ab. Wenn man nun zeigen kann, daß jeder Rechenschritt zu einem Zustand führt, der durch ein kleineres Element der partiellen Ordnung charakterisiert ist, so folgt aus dem Fundiertheitsprinzip sofort, daß es bei beliebiger Eingabe nur endlich viele Rechenschritte geben kann. Die Schwierigkeit ist im allgemeinen, eine geeignete fundierte partielle Ordnung zu finden. Die nachfolgend beschriebene Ordnung auf Multimengen ist hier häufig nützlich.

Bemerkung 4.49 Es sei „$<$“ eine strikte partielle Ordnung auf der Menge A. Mit $\mathbb{N}^A$ bezeichnen wir die Menge aller Multimengen mit Elementen aus A (vgl. Abschnitt 2.7.2 sowie Beispiele 3.34 Nr. 7). Für $M, N \in \mathbb{N}^A$ setzen wir $N <_m M$ genau dann, wenn es Multimengen $\emptyset \neq K \subseteq_m M$ und $L \subseteq_m N$ gibt derart, daß $N = (M \setminus_m K) \cup_m L$ wo gilt $\forall l \in L\ \exists k \in K\colon k > l$. Hierbei stehen „$\subseteq_m$“, „$\cup_m$“ und „$\setminus_m$“ für die Multimengen-Beziehungen und -Operationen, vgl. Abschnitt 2.7.2. Die Ordnung „$<_m$“ wird *Multimengen-Ordnung* über „$<$“ genannt. Intuitiv wird eine Multimenge M kleiner bezüglich „$<_m$“, wenn wir ein Element herausnehmen und beliebig—aber endlich—viele kleinere (in der Ordnung „$<$“) hinzufügen, wobei dieser Vorgang iteriert werden darf. Der wichtige Zusammenhang, den wir hier nicht beweisen ist der folgende: Es ist die Multimengen-Ordnung „$<_m$“ stets fundiert, wenn die Ausgangsordnung „$<$“ fundiert ist.

Bemerkung 4.50 Das Prinzip der wohlfundierten Induktion läßt sich auch Relationen anwenden, die nicht notwendigerweise transitiv sind. Wir nennen eine Relation $R \subseteq A \times A$ *wohlfundiert* genau dann, wenn es keine unendliche absteigende R-Kette

$$\ldots, R(a_{n+1}, a_n), R(a_n, a_{n-1}) \ldots, R(a_2, a_1), R(a_1, a_0)$$

gibt.[3] Sei im nachfolgenden R wohlfundiert. Es beschreibe φ eine Eigenschaft, die auf Elemente von A zutrifft oder nicht. Gilt

(††) jedes Element $a \in A$ besitzt die Eigenschaft φ, sobald alle Elemente aus der Menge der R-Vorgänger $\{b \in A \mid R^+(b, a)\}$ die Eigenschaft φ besitzen,

so haben alle Elemente aus A die Eigenschaft φ. Gäbe es nämlich ein Element a_0, das die Eigenschaft a_1 nicht besitzt, so würde man wegen (††) unter den R^+-Vorgängern von a_0 ein Element a_1 finden, auf das die Eigenschaft φ ebenfalls nicht zutrifft. Durch Iteration ergäbe sich eine unendliche R^+-Kette

$$\ldots, R^+(a_{n+1}, a_n), R^+(a_n, a_{n-1}) \ldots, R^+(a_2, a_1), R^+(a_1, a_0)$$

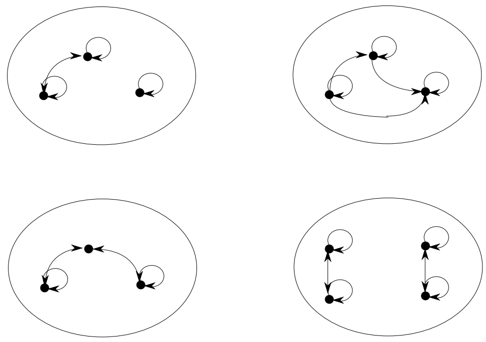
wo die Eigenschaft φ auf keines der Elemente a_i zutrifft ($i \in \mathbb{N}$). Eine solche Kette kann aber nicht existieren, da es ja keine unendliche absteigende R-Kette gibt. Ein anderer Beweis ergibt sich aus der Beobachtung, daß R als wohlfundierte Relation notwendig irreflexiv ist. Damit ist R^+ eine strikte partielle Ordnung. Man kann nun Lemma 4.48 zum Beweis der Behauptung verwenden. Die Einzelheiten bleiben dem Leser überlassen.

4.6 Aufgaben zu Kapitel 4

Aufgaben zu Teilkapitel 4.1

Aufgabe 4.1 Welche der in den nachfolgenden vier Abbildungen dargestellten Relationen sind reflexiv, welche transitiv, welche symmetrisch?

[3] Andere Autoren definieren wohlfundierte Relationen in der Form, daß es keine unendlichen *aufsteigenden* R-Ketten gibt. Man hat also die Richtung der verbotenen Kette zu beachten! Unsere Definition ist konsistent mit der obigen Definition der Fundiertheit einer partiellen Ordnung „$\leq$".



Aufgabe 4.2 Beweisen Sie Lemma 4.4.

Aufgabe 4.3 Es sei $f\colon A \to A$ eine Funktion. Zeigen Sie:

- f ist nilpotent genau dann, wenn f als Relation betrachtet symmetrisch ist.
- f is idempotent genau dann, wenn f als Relation betrachtet transitiv ist.

Weisen Sie nun nach, daß die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

1. f ist als Relation reflexiv,
2. f ist als Relation idempotent und nilpotent,
3. $f = Id_A$.

Aufgabe 4.4 Es seien R und S zweistellige Relationen auf der Menge A. Zeigen Sie: Ist R oder S antisymmetrisch, so auch $R \cap S$.

Aufgabe 4.5 Ist die Vereinigung zweier reflexiver (resp. symmetrischer, antisymmetrischer, transitiver) Relationen auf einer Menge A stets selbst wieder reflexiv (resp. symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv)? Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein einfaches Gegenbeispiel.

Aufgabe 4.6 Ist die Komposition zweier reflexiver Relationen auf der Menge A stets selbst wieder reflexiv? Ist die Komposition zweier symmetrischer Relationen auf der Menge A stets selbst wieder symmetrisch? Ist die Komposition zweier antisymmetrischer Relationen auf der Menge A stets selbst wieder antisymmetrisch? Ist die Komposition zweier transitiver Relationen auf der Menge A stets selbst wieder transitiv? Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein einfaches Gegenbeispiel.

Aufgabe 4.7 Es sei $R \subseteq A \times A$ eine Relation. Zeigen Sie:

1. R ist reflexiv genau dann, wenn $Id_A \subseteq R$ gilt.
2. R ist symmetrisch genau dann, wenn $R^{-1} \subseteq R$ gilt.
3. R ist transitiv genau dann, wenn $R \circ R \subseteq R$ gilt.
4. R ist antisymmetrisch genau dann, wenn $R \cap R^{-1} \subseteq Id_A$ gilt.

Aufgabe 4.8 Es sei A eine beliebige Menge und Id_A die Identitätsrelation auf A (vgl. Def. 3.35). Zeigen Sie: Id_A ist reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch und transitiv. Es ist Id_A die einzige Relation auf A mit diesen vier Eigenschaften.

Aufgabe 4.9 Es sei R eine binäre Relation auf der Menge A. Zeigen Sie

1. ist R reflexiv und euklidisch, so ist R auch symmetrisch und transitiv,
2. ist R reflexiv und anti-euklidisch, so ist R auch symmetrisch und transitiv.

Aufgabe 4.10 Es sei $M = \{a, b\}$. Geben Sie eine binäre Relation R auf M an, die weder reflexiv, noch transitiv, anti-symmetrisch, euklidisch oder anti-euklidisch ist.

Aufgabe 4.11 Es sei $M = \{a, b, c\}$. Geben Sie eine binäre Relation R auf M an, die keine der Eigenschaften (i)–(v) aus Definition 4.1 hat, und die nicht euklidisch ist.

Aufgaben zu Teilkapitel 4.2

Aufgabe 4.12 Durch welche Abbildungen sind die in den Beispielen 4.7 erwähnten Äquivalenzrelationen induziert (im Sinn von Beispiele 4.7 Nr. 1)?

Aufgabe 4.13 Beweisen Sie die zweite Teilaussage von Lemma 4.13.

Aufgabe 4.14 Es sei A eine nichtleere Menge und A^* die Menge aller Wörter über A (vgl. Definition 3.9). Die Konkatenation „$\circ$“ sei wie in Beispiele 3.34 Nr. 5 erklärt. Sei $L \subseteq A^*$ eine formale Sprache über A. Für $v, v' \in A^*$ definieren wir

$$\begin{aligned} v \sim_L^r v' \quad &:\Leftrightarrow \quad (\forall w \in A^*\colon v \circ w \in L \Leftrightarrow v' \circ w \in L), \\ v \sim_L^l v' \quad &:\Leftrightarrow \quad (\forall u \in A^*\colon u \circ v \in L \Leftrightarrow u \circ v' \in L). \\ v \sim_L v' \quad &:\Leftrightarrow \quad (\forall u, w \in A^*\colon u \circ v \circ w \in L \Leftrightarrow u \circ v' \circ w \in L). \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

1. die Relationen „$\sim_L^r$“, „$\sim_L^l$“ und „$\sim_L$“ sind Äquivalenzrelationen auf A^*.
2. Gilt $v \sim_L^r v'$, so auch $v \circ w \sim_L^r v' \circ w$ für alle $w \in A^*$.
3. Gilt $v \sim_L^l v'$, so auch $u \circ v \sim_L^r u \circ v'$ für alle $u \in A^*$.
4. Gilt $v \sim_L v'$, so auch $u \circ v \circ w \sim_L u \circ v' \circ w$ für alle $u, w \in A^*$.
5. Gilt $v_1 \sim_L v_1'$ und $v_2 \sim_L v_2'$, so auch $v_1 \circ v_2 \sim_L v_1' \circ v_2'$.

Aufgabe 4.15 Es sei $A := \{a, b\}$ und $L := \{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$. Wie sehen die Äquivalenzklassen der drei in Aufgabe 4.14 definierten Äquivalenzrelationen „$\sim_L^r$“, „$\sim_L^l$“ und „$\sim_L$“ aus?

Aufgabe 4.16 Beweisen Sie Lemma 4.19.

Aufgabe 4.17 Es seien R und S zwei Äquivalenzrelationen auf der Menge A. Zeigen Sie: R verfeinert S genau dann, wenn $R \subseteq S$ gilt.

Aufgaben zu Teilkapitel 4.3

Aufgabe 4.18 Wir hatten zahlreiche partielle Ordnungen eingeführt, ohne den Nachweis zu führen, daß es sich um partielle Ordnungen handelt. Beweisen Sie dies für Beispiel 4.25 sowie die Beispiele 4.28 Nr. 8 und Nr. 2.

Aufgabe 4.19 Die Teilbarkeitsrelation T (vgl. 4.28 Nr. 2) definiert eine partielle Ordnung auf der Menge $\{1, 2, \ldots, 30\}$. Wie sehen die maximalen Elemente aus, wie die minimalen?

Aufgabe 4.20 Es bezeichne T die Teilbarkeitsrelation auf $\mathbb{N}$ (vgl. 4.28 Nr. 2). Wie sehen die direkten Nachfolger, wie die direkten Vorgänger einer Zahl n aus?

Aufgabe 4.21 Es sei $A_1 = A_2 := \{1, 2, 3\}$. Auf A_1 und A_2 betrachten wir die natürliche Ordnung der Elemente. Wie sieht die Produktordnung (vgl. 4.28 Nr. 7) auf $A_1 \times A_2$ aus? Zeichnen Sie ein Hasse-Diagramm.

Aufgabe 4.22 Beweisen Sie Lemma 4.30.

Aufgabe 4.23 Es seien „$\leq_1$“ und „$\leq_2$“ zwei lineare Ordnungen auf M und „$\leq_{1,2}$“ ihr Durchschnitt. Zeigen Sie: es ist „$\leq_{1,2}$“ eine lineare Ordnung genau dann, wenn „$\leq_1$“ und „$\leq_2$“ übereinstimmen.

Aufgabe 4.24 Es seien R_1 und R_2 partielle Ordnungen auf der Menge A. Ist auch $R_1 \cap R_2$ (resp. $R_1 \cup R_2$) eine partielle Ordnung auf A? Geben Sie einen Beweis oder ein einfaches Gegenbeispiel. Sie können gegebenenfalls Aufgabe 4.5 verwenden.

Aufgaben zu Teilkapitel 4.4

Aufgabe 4.25 Es sei A eine Menge. Zeigen Sie: die Abbildung, die einer binären Relation $R \subseteq A \times A$ ihre reflexive (resp. symmetrische, transitive, reflexiv-transitive) Hülle zuordnet, ist eine Hüllenabbildung im Sinn von Definition 4.35. Die Fixpunkte dieser Abbildung sind genau die reflexiven (resp. symmetrischen, transitiven, reflexiven und transitiven) Relationen auf A.

Aufgabe 4.26 Es seien R_1, R_2 und S Äquivalenzrelationen auf A. Zeigen Sie:

1. falls S sowohl R_1 als auch R_2 verfeinert, so auch $R_1 \cap R_2$.

2. falls R_1 und R_2 beide S verfeinern, so tut dies auch $(R_1 \cup R_2)^*$.

Aufgabe 4.27 Verwenden Sie Aufgabe 4.25 und Lemma 4.37, um einen einfachen Beweis von Lemma 4.4 zu erhalten.

Aufgabe 4.28 Es sei M eine Menge und E eine Eigenschaft, die auf Teilmengen von M zutrifft oder nicht. Wir sagen, daß E die *Durchschnittseigenschaft* hat, genau dann, falls folgende Bedingungen gelten:

1. M hat die Eigenschaft E.

2. Ist $\{A_i \mid i \in I\}$ eine nichtleere Familie von Teilmengen von M, wo jedes Element A_i die Eigenschaft E hat, so hat auch der Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} A_i$ die Eigenschaft E.

Es habe nun E die Durchschnittseigenschaft. Zeigen Sie: die Abbildung H_E, die jeder Teilmenge $B \subseteq M$ den Durchschnitt aller B umfassenden Teilmengen von M mit der Eigenschaft E zuordnet, ist eine Hüllenabbildung. Die Fixpunkte sind genau die Teilmengen mit der Eigenschaft E.

Aufgabe 4.29 Beweisen Sie Lemma 4.40 mit Hilfe von Lemma 4.3 und Lemma 3.22.

Aufgabe 4.30 Beweisen Sie: ist $R \subseteq A \times A$ eine endliche Relation mit n geordneten Paaren, so ist auch R^+ endlich und hat höchstens n^2 geordnete Paare. Ist mit R auch stets R^* endlich?

Aufgabe 4.31 Zeigen Sie: ist $R \subseteq A \times A$ eine symmetrische Relation, so sind auch die transitive Hülle R^+ und die reflexiv-transitive Hülle R^* symmetrisch. Gilt auch jeweils die Umkehrung?

Aufgabe 4.32 Es sei $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert durch

$$R(n,m) \Leftrightarrow m = n + 2.$$

Beschreiben Sie die Relationen R^i $(i \in \mathbb{N})$ und R^*.

Aufgabe 4.33 Zeigen Sie: ist R_S diejenige Relation, die die möglichen Zielfelder eines Springers auf dem ansonsten leeren Schachbrett bei einem einzelnen Zug beschreibt, so umfaßt R_S^* alle Felderpaare. (Man kann sogar mit dem Springer alle Felder des Schachbretts durchlaufen, ohne daß eines der Felder zweimal besucht wird.)

Aufgabe 4.34 Geben sie eine möglichst kleine Relation $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ an, so daß $R^* = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 4.35 Es sei $R \subseteq A \times A$. Beweisen Sie, daß $\bigcup_{n \geq 0} R^n$ die reflexiv-transitive Hülle von R ist.

Aufgabe 4.36 Zeigen Sie: Bezeichnet R die direkte Nachfolgerbeziehung der partiellen Ordnung „$\leq$“ auf der endlichen Menge M, so stimmen R^* (resp. R^+) und „$\leq$“ (resp. „$<$“) überein. Gilt dies auch stets für partielle Ordnungen auf unendlichen Mengen?

Aufgabe 4.37 Es sei $R \subseteq A \times A$. Gilt stets $(R^{-1})^* = (R^*)^{-1}$? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

Aufgaben zu Teilkapitel 4.5

Aufgabe 4.38 Es sei „$\leq$“ eine partielle Ordnung auf der Menge A. Zeigen Sie: „$\leq$“ ist fundiert genau dann, wenn es in A keine unendlich absteigende Kette von Elementen $\cdots < a_{n+1} < a_n < \cdots a_2 < a_1 < a_0$ gibt.

4.7 Bibliographische Angaben

Die im letzten Abschnitt betrachteten fundierten partiellen Ordnungen sind Spezialfälle sogenannter *abstrakter Reduktionssysteme*, die in verschiedenen

Gebieten der Informatik, vor allem im Bereich der Termersetzung, betrachtet werden. Mehr Hintergrund zu diesem Thema bietet Kapitel 1 aus [BN98]. Die Multimengen-Ordnung (vgl. Bemerkung 4.49) wurde in [DM79] eingeführt.