Mathematische Grundlagen der Informatik und Linguistik
Teil 1: von Mengen zur Aussagenlogik

Klaus U. Schulz

4. Oktober 2001

Inhaltsverzeichnis

1

Zum Umgang mit mathematischen Aussagen

Es ist eine ganz wesentliche Grundlage der mathematischen Denkweise, daß alle Behauptungen stets durch entsprechende Beweise zu verifizieren sind. Gerade dieser Aspekt der Mathematik wird jedoch in der Schulmathematik häufig nur am Rande thematisiert. Beim Einstieg in den Mathematikunterricht an der Hochschule bereitet es anfangs fast immer erhebliche Schwierigkeiten, ein Gefühl dafür zu erhalten, was denn eigentlich als ein Beweis zu betrachten sei. Eines unserer Ziele wird sein, diese Unsicherheit soweit wie möglich zu beseitigen. Hierzu gibt es kein Patentrezept, insbesondere es unmöglich, an dieser Stelle eine formale Definition eines Beweises zu geben. Man kann aber doch eine Reihe einfacher Regeln vorab beschreiben, von denen in Beweisen immer wieder—mehr oder weniger stillscheigend—Gebrauch gemacht wird. Aus der Erfahrung, daß sich damit viele Unsicherheiten und Verwirrungen beheben lassen, werden wir in diesem einleitenden Kapitel einige dieser Prinzipien darstellen.

1.1 Aussagen und Wahrheitswerte

Eine *Aussage* im Bereich der natürlichen Sprache ist ein Satz, der wahr oder falsch sein kann. Typisch für die natürliche Sprache sind aber auch Aussagen, wo es fraglich erscheint, ob die bloße Auswahl zwischen Wahrheitswerten „wahr“ oder „falsch“ eine adäquate Beurteilung liefern kann. Nach der Richtigkeit von Sätzen wie

> *„München ist schön“*
> *„Der Mond ist rund“*

gefragt, werden wir vielleicht dazu tendieren, weitere Charakterisierungen wie „Geschmacksfrage“, „vage richtig“ oder „ambig“ als sinnvolle und mögliche Wahrheitswerte heranzuziehen.

Auch in der Mathematik hat man ständig mit Aussagen zu tun. Um zu einer hinreichend formalen Betrachtungsweise zu gelangen, verlangt man aber, *daß mathematische Aussagen stets entweder wahr oder falsch sind*, weitere Möglichkeiten gibt es nicht. Dieses Prinzip bedeutet natürlich nicht, daß der Wahrheitswert einer mathematischen Aussage bekannt sein muß, es bedeutet nicht einmal, daß der Wahrheitswert prinzipiell ermittelt werden kann. Es ist z.B. kein Verfahren bekannt, mit dem festgestellt werden könnte, ob die Ziffernfolge

$$w = 122333444455555666666$$

in der Dezimaldarstellung der Kreiszahl π vorkommt. Gleichwohl wissen wir, daß die Aussage

> *„die Ziffernfolge w kommt in der Dezimaldarstellung von π vor“*

entweder unzweifelhaft stimmt oder eindeutig falsch ist.

Sicherlich wäre es trotzdem ohne weiteres möglich, mit weiteren Wahrheitswerten zu arbeiten. Insofern stellt die angegebene Grundregel lediglich eine — im folgenden für uns bindende — Konvention dar.

Wir werden später fortlaufend mit konkreten mathematischen Aussagen konfrontiert sein. Um den Umgang mit solchen Aussagen vorab zu erklären, führen wir Symbole

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \ldots, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots$$

ein[1], die für beliebige mathematische Aussagen stehen sollen. Als Wahrheitswerte verwenden wir die Symbole „1“ und „0“ , es bedeutet

$$WW(\alpha) = 1 \text{ (bzw. } WW(\alpha) = 0)$$

[1] α, β, γ liest sich: alpha, beta, gamma.

daß die Aussage α wahr (bzw. falsch) ist.

1.2 Aussagenlogische Junktoren

Während die Frage, ob für eine mathematische Aussage α nun $WW(\alpha) = 1$ oder $WW(\alpha) = 0$ gilt, oft schwierig oder gar nicht zu beantworten ist, ist es einfacher, Regeln festzulegen, die beschreiben, welche Wahrheitswerte man erhält, wenn man Aussagen bestimmter Wahrheitswerte mit Hilfe sogenannter *Junktoren* oder *Bindewörter* zu komplexeren Aussagen kombiniert. Die gebräuchlichsten Junktoren sind, in ihrer umgangsprachlichen Bezeichnung,

und, oder, falls, wenn–dann, genau–dann–wenn, nicht.

Diese Junktoren werden auch in mathematischen Aussagen sehr oft verwendet, manchmal natürlich–sprachlich, manchmal abgekürzt durch folgende Symbole:

$\wedge$	(und, Konjunktion)
$\vee$	(oder, Disjunktion)
$\Rightarrow$	(wenn-dann, Implikation)
$\Leftrightarrow$	(genau-dann-wenn, Biimplikation)
$\neg$	(nicht, Negation)

In der Umgangssprache können diese Junktoren — zumindest zur Verbindung von Teilphrasen — mit unterschiedlichem Sinn verwendet werden:

„An Sonn– und Feiertagen fährt der Bus nicht.“
„An kühlen und regnerischen Tagen verkriecht sich der Dachs.“

In der Mathematik hingegen folgt die Verwendung dieser Junktoren genau festgelegten Spielregeln, um mathematischen Aussagen einen eindeutigen Inhalt zu geben. Diese Regeln wollen wir hier vorab darstellen.[2] Die Verwendung der Negation ist naheliegend. In der Mathematik wie im Alltag

[2] Für Leser mit etwas Hintergrundwissen: wir sollten klarstellen, daß wir an dieser Stelle keine Einführung in die Aussagenlogik im Sinn haben, auch wenn wir im folgenden Teile der Aussagenlogik oberflächlich streifen. Uns geht es hier zunächst nur darum, die Verwen-

empfindet man eine Aussage der Form $\neg\alpha$ genau dann als wahr, wenn α falsch ist. Kürzer:

$$WW(\neg\alpha) = 1 \Leftrightarrow WW(\alpha) = 0.$$

In einer Wahrheitswert-Tabelle kann man diese Regel so festhalten:

α	$\neg\alpha$
0	1
1	0

Ähnlich legt die folgende Tabelle den mathematischen Gebrauch der übrigen Standardjunktoren fest.

α	β	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Hierzu einige Kommentare. Die Festlegung der Konjunktion „$\wedge$“ entspricht der Erwartung: eine Aussage der Form $\alpha \wedge \beta$ ist genau dann wahr, wenn sowohl α als auch β wahr ist. Die Verwendung des Junktors „$\vee$“ (Disjunktion) entspricht dem lateinischen „vel“, also dem nicht–ausschließenden oder. Am willkürlichsten ist die Festlegung des Gebrauchs der Implikation „$\Rightarrow$“. Gemäß der Tabelle ist eine Aussage der Form $\alpha \Rightarrow \beta$ automatisch richtig, wenn das Vorderglied α falsch ist. Dieses Prinzip ist unter dem Stichwort „ex falso quodlibet“ bekannt. Wenn wir α und β mit natürlich-sprachlichen Inhalten füllen, bedeutet dies etwa, daß ein Satz wie

„Wenn Prag am Rhein liegt, dann ist zwei und zwei fünf.“

als wahr eingestuft wird. Dies ist zumindest diskutabel — man könnte auch den Standpunkt vertreten, daß ein derartiger Satz überhaupt keine Aussage macht, da die Prämisse falsch ist. Man kann aber auch die Festlegung kritisieren, daß Aussagen der Form „wenn α, dann β“ stets als wahr eingestuft werden, wann immer α und β wahr sind. Nehmen wir den Satz

dungsweise von Junktoren in mathematischen Aussagen zu klären. Insbesondere führen wir keine Unterscheidung in Objekt- und Metasprache ein, demzufolge ist für uns ein Junktorensymbol wirklich nur eine Abkürzung für den entsprechenden natürlich-sprachlichen Ausdruck in seiner mathematischen Verwendung.

„Wenn morgen Montag ist, dann ist zwei und zwei vier."

Auch an einem Sonntag geäußert, kann man in als inakzeptabel einstufen, da die Prämisse keinerlei *Relevanz* für die Konklusion hat.

Hier wird offensichtlich, daß die Wahrheitswert-Tabellen letztlich eine *Übereinkunft* darstellen, die den Gebrauch der Junktoren bindend festsetzt, und nicht etwa eine „objektive und ewig und überall unumstößliche Wahrheit", die lediglich einmal explizit festgehalten werden muß. Natürlich versucht man solche Übereinkünfte, die an anderer Stelle etwa auch in der Form von Axiomen in die Mathematik eingehen, intuitiv richtig und vernünftig zu treffen. Der Vorteil der gegebenen Formalisierung der Implikation ist ihre Einfachheit. Insbesondere folgt aus unserer Festlegung das folgende

Kompositionalitätsprinzip: *Es sei J einer der Junktoren $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Dann kann der Wahrheitswert einer Aussage der Form $\alpha\ J\ \beta$ allein aus den Wahrheitswerten $WW(\alpha)$ und $WW(\beta)$ sowie aus der Kenntnis von J ermittelt werden. Entsprechendes gilt für Aussagen der Form $\neg\alpha$.*

Entscheidend hierbei ist, daß in die „innere Form" der Bestandteile α und β nicht hineingeschaut zu werden braucht, wenn ihre Wahrheitswerte bekannt sind.

1.3 Aussagenlogische Tautologien

Nachdem die Wahrheitswert-Tabellen den Gebrauch der Junktoren festschreiben, stellt man nun fest, daß es gewisse zusammengesetzte Aussagen gibt, die allein aufgrund ihrer Junktoren-Struktur immer wahr sind, unabhängig davon, wie die Wahrheitswerte der einfachsten Bestandteile aussehen. Wir werden solche Aussagen als *aussagenlogische Tautologien* bezeichnen. Beispielsweise ist jede Aussage der Form $\alpha \vee \neg\alpha$ oder $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ eine aussagenlogische Tautologie, wie sich mittels einer Wahrheitswert-Tabelle an folgender Fallunterscheidung ablesen läßt:

α	$\neg\alpha$	$\alpha \vee \neg\alpha$	$\alpha \wedge \neg\alpha$	$\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1

Da die Aussage α entweder wahr oder falsch ist, ist die Fallunterscheidung komplett. Der nachfolgende Satz gibt eine Reihe weiterer Tautologien. Die Länge der Liste wird dadurch motiviert, daß uns die meisten der angegebenen Tautologien noch in anderen Zusammenhängen begegnen werden.

Satz 1.1 *Seien α, β und γ Aussagen. Die nachfolgenden Aussagen sind aussagenlogische Tautologien:*

1. $(\alpha \vee \alpha) \Leftrightarrow \alpha$ *(Idempotenz von $\vee$),*
2. $(\alpha \wedge \alpha) \Leftrightarrow \alpha$ *(Idempotenz von $\wedge$),*
3. $(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow (\beta \wedge \alpha)$ *(Kommutativität von $\wedge$),*
4. $(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow (\beta \vee \alpha)$ *(Kommutativität von $\vee$),*
5. $((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma))$ *(Assoziativität von $\wedge$),*
6. $((\alpha \vee \beta) \vee \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \vee (\beta \vee \gamma))$ *(Assoziativität von $\vee$),*
7. $(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \Leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ *(Distributivität von $\wedge$ und $\vee$),*
8. $(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \Leftrightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$ *(Distributivität von $\vee$ und $\wedge$),*
9. $\neg(\neg\alpha) \Leftrightarrow \alpha$,
10. $\neg(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$,
11. $\neg(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$,
12. $(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow ((\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \beta)$,
13. $(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \alpha)$,
14. $(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$,
15. $\neg(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\alpha \wedge \neg\beta)$,
16. $(\alpha \Leftrightarrow \beta) \Leftrightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha))$,
17. $(\alpha \wedge (\alpha \Rightarrow \beta)) \Rightarrow \beta$,
18. $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge \neg\beta)) \Rightarrow \neg\alpha$,
19. $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)$ *(Transitivität von $\Rightarrow$),*

20. $((\alpha \Leftrightarrow \beta) \wedge (\beta \Leftrightarrow \gamma)) \Rightarrow (\alpha \Leftrightarrow \gamma)$ *(Transitivität von* $\Leftrightarrow$*).*

Beweis. Ein Beweis ergibt sich jeweils aus einer Fallunterscheidung über die möglichen Wahrheitswerte der Aussagen α, β und γ. Wir führen dies exemplarisch für Tautologie 12 vor:

α	β	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\alpha \vee \beta$	$(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \beta$	11.
0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Kommen drei Teilaussagen α, β und γ vor, so sind natürlich $8 = 2^3$ Fälle zu unterscheiden. ■

Viele der angegebenen Tautologien können in der Weise gelesen werden, daß sie eine Strategie zur Beweisführungen für eine Behauptung beinhalten. So besagt zum Beispiel Tautologie 19 (Transitivität von „$\Rightarrow$“ folgendes: wenn eine Aussage α eine Zwischenbehauptung β impliziert, und wenn die Zwischenbehauptung β ihrerseits die Aussage γ impliziert, so ist damit auch gezeigt, daß aus α die Aussage γ folgt. Die Beobachtung wird in Aufgabe 1.2 vertieft.

1.4 Äquivalente Aussagen

Man nennt zwei Aussagen α und β *äquivalent* genau dann, wenn $\alpha \Leftrightarrow \beta$ wahr ist. Zum Beispiel sind α und β stets „aussagenlogisch“ äquivalent, wenn $\alpha \Leftrightarrow \beta$ eine aussagenlogische Tautologie ist. In Satz 1.1 geben die ersten vierzehn Tautologien aussagenlogische Äquivalenzen wieder. Die Transitivität von „$\Leftrightarrow$“ (Tautologie 20) macht deutlich, daß der Beweis der Äquivalenz zweier Aussagen α und γ auch mit Hilfe zweier Zwischenschritte erfolgen kann, wo man die Äquivalenz von α und γ zu einer Aussage β verifiziert. Offenkundig können dann auch mehrere solcher Zwischenschritte verwendet werden. Ketten gültiger Äquivalenzen

$$\alpha_1 \Leftrightarrow \alpha_2, \alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1} \Leftrightarrow \alpha_n$$

zeigen damit eine gültige Äquivalenz $\alpha_1 \Leftrightarrow \alpha_n$. Viele Äquivalenzbeweise folgen dieser einfachen Struktur, wobei darüberhinaus häufig zusätzlich von

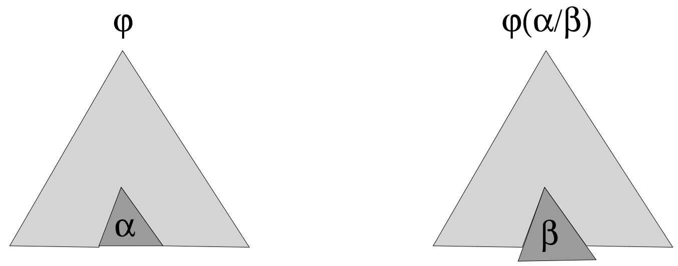

Abbildung 1.1: Sind α und β äquivalent, so auch φ und $\varphi(\alpha/\beta)$.

folgendem Prinzip Gebrauch gemacht wird, das man als eine Verallgemeinerung des Kompositionalitätsprinzips ansehen kann.

Ersetzungsprinzip: *Ersetzt man in einer Aussage φ einige Vorkommen einer Teilaussage α durch eine zu α äquivalente Aussage β, so ist die entstehende Aussage $\varphi(\alpha/\beta)$ äquivalent zu φ. Es ist also $\varphi(\alpha/\beta)$ wahr genau dann, wenn φ wahr ist.*

Abbildung 1.1 bietet eine Illustration. Ein verwandtes Prinzip, das in der Mathematik oft verwendet wird, ist das folgende

Leibniz-Prinzip: *Es seien s und t zwei Terme, das heißt Ausdrücke, die Elemente bezeichnen. Kommt s in einer Aussage φ vor und gilt $s = t$, so ist φ wahr genau dann, wenn auch die Aussage $\varphi(s/t)$ wahr ist, die aus φ entsteht, wenn man einige Vorkommen von s durch t ersetzt.*

1.5 Implikationen

Sehr häufig sind in der Mathematik Implikationen zu verifizieren. Eine Implikation ist eine Aussage der Form

$$(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \Rightarrow \beta.$$

Hierbei ist $n \geq 1$. Wegen der Assoziativität von „$\wedge$“ (Satz 1.1 Nr. 5) führen alle expliziten Klammerungen der α_i's zu äquivalenten Aussagen.

Bemerkung: *Um die Gültigkeit (Wahrheit) einer solchen Aussage zu beweisen, kann man annehmen, daß alle Prämissen α_i $(i = 1, ..., n)$ wahr* *sind. Kann unter dieser Voraussetzung die Konklusion β gezeigt werden, so ist die Implikation bewiesen.*

Entscheidend ist, daß all diejenigen Fälle, wo eine Prämisse α_i falsch ist, überhaupt nicht betrachtet werden müssen. Ein Rechtfertigung ergibt sich unmittelbar aus den Wahrheitstafeln für „$\wedge$" und für „$\Rightarrow$". Wie im Falle der Biimplikation kann man auch Ketten gültiger Implikationen

$$\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2, \alpha_2 \Rightarrow \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1} \Rightarrow \alpha_n$$

zu einer gültigen Implikation $\alpha_1 \Rightarrow \alpha_n$ zusammenfassen, wie sich aus Tautologie 19 aus Satz 1.1 ergibt.

1.6 Aussageformen

Neben Aussagen treten in der Mathematik häufig *Aussageformen* auf. Aussageformen sind ähnlich wie Aussagen, enthalten aber Variable, die mit bestimmten Werten belegt werden können. Wenn x eine Variable ist, die als Wert eine natürliche Zahl annehmen kann, so sind

„*x ist eine Primzahl*" und
„$(x > 14) \Rightarrow (x > 10)$"

Aussageformen. Beim Umgang mit Aussageformen treten in der Mathematik häufig der Allquantor „$\forall$" (lies: für alle) und der Existenzquantor „$\exists$" (lies: es existiert ein) auf. Mit diesen Quantoren kann man die Variablen einer Aussageform binden. Wenn alle Variablen gebunden sind, erhält man eine Aussage:

„$\exists x$: *x ist eine Primzahl*" und
„$\forall x$: $(x > 14) \Rightarrow (x > 10)$"

sind wahre Aussagen über die natürlichen Zahlen, die sich ausführlicher geschrieben wie folgt lesen:

„*es existiert ein x mit der Eigenschaft x ist eine Primzahl*"
„*für alle x gilt die Eigenschaft* $(x > 14) \Rightarrow (x > 10)$"

Allgemein ist eine Aussage der Form $\forall x\colon \alpha(x)$ in einem Bereich M wahr genau dann, wenn all diejenigen Aussagen $\alpha(x/n)$ wahr sind, die man durch Belegung der Variablen x in der Aussageform $\alpha(x)$ mit Werten $n \in M$ erhält. Eine Aussage der Form $\exists x\colon \alpha(x)$ ist wahr genau dann, wenn es zumindest einen erlaubten Wert n für x gibt, so daß $\alpha(x/n)$ wahr ist. Der Bereich M der erlaubten Werte ergibt sich aus dem Kontext, oder er wird explizit angegeben, wie in den Aussagen

„$\exists x \in \mathbb{N}$: *x ist eine Primzahl*“ und
„$\forall x \in \mathbb{N}\colon (x > 14) \Rightarrow (x > 10)$“,

wo $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnet.

Wir wollen kurz festhalten, wie „universelle“ Aussagen (Aussagen der Form $\forall x\colon \alpha(x)$) und „existentielle“ Aussagen (Aussagen der Form $\exists x\colon \alpha(x)$) typischerweise verifiziert oder falsifiziert werden. Diese Rezepte werden insbesondere dann wichtig, wenn die Variable x unendlich viele Werte annehmen kann, die man nicht mehr einzeln inspizieren kann. Wir werden von der Sprechweise Gebrauch machen, sich „einen beliebigen, (generischen, gedachten) Wert herauszugreifen“. Was damit gemeint ist, läßt sich am besten mit folgendem Beispiel aus der Biologie klarmachen. Wie würde man einem Zweifler plausibel machen, daß alle Pinguine Vögel sind? Man könnte die Argumentation etwa in der folgenden Form beginnen:

> „Nehmen Sie sich irgendeine Pinguindame, nennen wir sie Frieda. Sie werden feststellen, daß Frieda in der Tat Federn hat und Eier legt...“

Natürlich ist nicht von einem bestimmten Pinguin die Rede, sondern „Frieda“ ist ein generisches, nur gedachtes Objekt, das stellvertretend für jeden beliebigen—weiblichen—Pinguin steht. Dieselbe Art der Argumentation wird auch in der Mathematik sehr oft verwendet.

Bemerkung 1.2 Um eine Aussage der Form $\forall x\colon \alpha(x)$ zu *beweisen*, kann man sich einen „generischen“ möglichen Wert g von x herausgreifen. Angenommen, wir machen über g keinerlei spezielle Annahmen. Wenn wir dennoch zeigen können, daß $\alpha(x/g)$ wahr ist, so heißt dies, daß man dieselbe Art der Argumentation auch auf jeden konkreten möglichen Wert n von

x anwenden könnte. Man käme stets zum Ergebnis, daß $\alpha(x/n)$ wahr ist. Deshalb ist $\forall x\colon \alpha(x)$ verifiziert. Um eine Aussage der Form $\forall x\colon \alpha(x)$ zu *widerlegen*, reicht es ein Gegenbeispiel anzugeben, das heißt einen möglichen konkreten Wert n von x, für den $\alpha(x/n)$ falsch ist.

Dual hierzu lassen sich für existentielle Aussagen folgende Regeln angeben.

Bemerkung 1.3 Um eine Aussage der Form $\exists x\colon \alpha(x)$ zu *beweisen*, reicht es ein Beispiel anzugeben, das heißt einen möglichen konkreten Wert n von x, für den $\alpha(x/n)$ wahr ist. Um eine Aussage der Form $\exists x\colon \alpha(x)$ zu *widerlegen*, kann man sich einen beliebigen, generischen Wert g von x herausgreifen. Angenommen, wir machen über g keinerlei spezielle Annahmen. Wenn wir dennoch zeigen können, daß $\alpha(x/g)$ falsch ist, so heißt dies, daß man dieselbe Art der Widerlegung auch auf jeden anderen konkreten Wert n von x anwenden könnte. Deshalb ist $\exists x\colon \alpha(x)$ widerlegt.

Wenn wir eine Aussage der Form $\forall x\colon \alpha(x)$ widerlegen, so ist dies gleichbedeutend damit, die Aussage $\neg\forall x\colon \alpha(x)$ nachzuweisen. Dual gilt: Wenn wir eine Aussage der Form $\exists x\colon \alpha(x)$ widerlegen, so ist dies gleichbedeutend damit, die Aussage $\neg\exists x\colon \alpha(x)$ nachzuweisen. Daher folgt aus Bemerkungen 1.2 und 1.3 zusammen mit Tautologie 9 aus Satz 1.1 folgende Beobachtung.

Bemerkung 1.4 Ist α eine Aussageform mit der Variablen x, so sind

$$\begin{array}{rcl}
\neg\forall x\colon \alpha(x) & \text{und} & \exists x\colon \neg\alpha(x), \\
\neg\exists x\colon \alpha(x) & \text{und} & \forall x\colon \neg\alpha(x), \\
\forall x\colon \alpha(x) & \text{und} & \neg\exists x\colon \neg\alpha(x), \\
\exists x\colon \alpha(x) & \text{und} & \neg\forall x\colon \neg\alpha(x)
\end{array}$$

jeweils äquivalente Aussagen.

1.7 Aufgaben zu Kapitel 1

Aufgabe 1.1 Führen Sie den Beweis von Satz 1.1 für weitere Fälle durch. Geben Sie einige weitere Tautologien an.

Aufgabe 1.2 Beweisen Sie, daß die folgenden Aussagen stets aussagenlogische Tautologien sind. Man kann diesen Tautologien eine inhaltliche Interpretation dergestalt geben, daß sie etwas über die mögliche Architektur eines Beweises aussagen. Geben Sie jeweils eine solche Interpretation.

1. $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge ((\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)$,
2. $(\alpha \Leftrightarrow \beta) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \gamma) \Leftrightarrow (\beta \Rightarrow \gamma))$,
3. $((\alpha \wedge \beta) \Rightarrow (\gamma \wedge \neg\gamma)) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \neg\beta)$,
4. $(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$.

Aufgabe 1.3 Man sagt manchmal, daß eine allquantifizierte Aussage eine möglicherweise unendliche „Konjunktion" repräsentiert, und eine existentielle Aussage eine möglicherweise unendliche „Disjunktion". Verdeutlichen Sie diese Betrachtungsweise im Spezialfall, wo die quantifizierten Variablen als Werte die natürlichen Zahlen annehmen können.

Aufgabe 1.4 Was bedeuten die folgenden Aussagen über die natürlichen Zahlen in ausführlicher Schreibweise? Welche Aussagen sind wahr?

1. $\exists x \forall y\colon x \geq y$,
2. $\exists x \forall y\colon x \leq y$,
3. $\forall x\colon (x = 0 \vee \exists y\colon x = y + 1)$,
4. $\forall x \exists y\colon (x < y \wedge \forall z\colon (x \leq z \leq y \Rightarrow (z = x \vee z = y)))$,
5. $\exists x\colon (x \neq 0 \wedge \forall y\colon (x \cdot y < x + y))$,
6. $\forall x \forall y \exists z \forall u\colon (((\exists k\colon x = u \cdot k) \wedge (\exists l\colon y = u \cdot l)) \Rightarrow (\exists m\colon z = u \cdot m))$.

Aufgabe 1.5 Geben Sie für die folgenden Aussagen über die natürlichen Zahlen eine mathematische Kurzdarstellung unter Verwendung der Junktoren „$\exists$" und „$\forall$" sowie der Zeichen „$+$", „$\leq$" und „$\cdot$".

1. Jede Zahl, die höchstens um 2 kleiner ist als ihr Doppeltes, ist kleinergleich 2.

2. Es gibt eine Zahl x, so daß jede Zahl y, die kleinergleich x ist, schon mit x identisch ist.

3. Für alle Zahlen x und y gilt: x und y sind identisch, oder x ist kleiner als y, oder y ist kleiner als x.

Aufgabe 1.6 Für Aussagen α und β sei $\alpha + \beta$ eine Abkürzung für

$$(\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\beta \wedge \neg\alpha).$$

Berechnen Sie die Wahrheitswert-Tabelle von des Junktors „+“. Was ist die umgangssprachliche Bedeutung des Junktors „+“? Zeigen Sie, daß stets $\alpha+\beta$ und $(\alpha \vee \beta) \wedge \neg(\alpha \wedge \beta)$ äquivalente Aussagen sind. Zeigen Sie ferner, daß für beliebige Aussagen α, β und γ die folgenden Aussagen stets aussagenlogische Tautologien darstellen:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & (\alpha + \beta) \Leftrightarrow (\beta + \alpha) \\
(2) & ((\alpha + \beta) + \gamma) \Leftrightarrow (\alpha + (\beta + \gamma)) \\
(3) & (\alpha \wedge (\beta + \gamma)) \Leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) + (\alpha \wedge \gamma)) \\
(4) & (\alpha + \alpha) \Leftrightarrow (\beta \wedge \neg\beta) \\
(5) & \alpha + \neg\alpha \\
(6) & (\alpha + (\alpha + \beta)) \Leftrightarrow \beta
\end{array}
$$