Übungsaufgaben Mathematische Grundlagen I
Abgabe: Di, 15.1.02

H.Leiß

10.1.02

Aufgabe 6.1 Sei $\mathcal{M} = \langle M, f^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}} \rangle$ eine Stuktur mit einer 1-stelligen Funktion $f^{\mathcal{M}} : M \to M$ und einer 2-stelligen Relation $R^{\mathcal{M}} \subseteq M \times M$.

(i) Man gebe eine Formel φ (mit dem Funktionszeichen f, aber ohne freie Variable, d.h. $\mathit{frei}(\phi) = \emptyset$) an, die in $\mathcal{M}$ genau wahr ist, wenn $f^{\mathcal{M}}$ eine injektive Funktion ist. (3 Punkte)

(ii) Man gebe eine Formel $\psi(x, y)$ an, die ausdrückt: „Stehen x und y (für Elemente, die) in der Beziehung R zu einander (stehen), so stehen (die entsprechenden Elemente) $f(x)$ und $f(y)$ in der inversen Beziehung“. (4 Punkte)

(iii) Sei $\mathcal{M} = \langle M, f^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}} \rangle$ die Struktur mit

$$\begin{array}{rcl} M & := & \mathbb{N}, \\ f^{\mathcal{M}}(n) & := & \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq 100, \\ 200 - n, & 100 \leq n \leq 200, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \\ R^{\mathcal{M}} & := & \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n < m\}. \end{array}$$

Berechne (nach der Definition) für die Formel

$$\tilde{\varphi}(x) \quad := \quad \exists y(R(x, y) \wedge R(f(x), f(y)))$$

den Wahrheitswert $[\![\tilde{\varphi}]\!]_h^{\mathcal{M}}$ für Belegungen h_1 mit $h_1(x) = 50$, h_2 mit $h_2(x) = 150$, und h_3 mit $h_3(x) = 250$. (4 Punkte)