Musterlösung zu Aufgabe 4.15

Gegeben seien die Mengen $A := \{a, b\}$ und $L := \{a^m b^n | m, n \in \mathbb{N}\}$ und die Äquivalenzrelation $\sim_L^r$:

$$v \sim_L^r v' \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall w \in A^*(v \circ w \in L \Leftrightarrow v' \circ w \in L).$$

Frage: Wie sehen die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation $\sim_L^r$ aus?

Antwort: Um die Äquivalenzklassen $[v]_L := \{v' \in A^* \mid v' \sim_L v\}$ zu bestimmen, unterscheiden wir verschiedene v:

1. Fall: $v \in L$, also $v = a^{m_0} b^{n_0'}$ für feste $m_0, n_0' \in \mathbb{N}$.

a) v enthält ein b, also $v = a^{m_0} b b^{n_0}$ für feste $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \forall m, n, \in \mathbb{N}, w \in A^* : (v \circ w \in L \quad &\Leftrightarrow \quad a^{m_0} b b^{n_0} \circ w \in L \\ &\Leftrightarrow \quad w \in \{b\}^* \\ &\Leftrightarrow \quad a^m b^{n+1} \circ w \in L), \end{aligned}$$

also: $\forall m, n, \in \mathbb{N} : \; v \sim_L^r a^m b^{n+1}$ und daher $[v]_L \supseteq \{a^m b^{n+1} | m, n \in \mathbb{N}\}$.

Bleibt noch zu zeigen: $[v]_L \subseteq \{a^m b^{n+1} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

Sei $v' \in [v]_L$, also

$$\forall w \in A^*(vw \in L \Leftrightarrow v'w \in L). \tag{1}$$

Dann ist wegen $v = v\epsilon \in L$ mit $w := \epsilon$ in (1) auch $v' = v'\epsilon \in L$, also ist $v' = a^m b^k$ für irgendwelche $m, k \in \mathbb{N}$. Wäre $k = 0$, so wäre für $w := a$ zwar $v'w = v'a = a^m a \in L$, aber $vw = a^{m_0} b^{n_0} ba \notin L$, im Widerspruch zu (1). Also muss $k \neq 0$ sein, also $v' = a^m b^{n+1}$ für irgendwelche $m, n \in \mathbb{N}$. Damit ist $[v]_L \subseteq \{a^m b^{n+1} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ gezeigt.

Zusammen mit dem vorigen wissen wir also:

$$\boxed{[v]_L = \{a^m b^{n+1} \mid m, n \in \mathbb{N}\}}$$

b) v enthält kein b, also $v = a^{m_0}$ für festes $m_0 \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{N}, w \in A^* : (v \circ w \in L \quad &\Leftrightarrow \quad a^{m_0} b b^{n_0} \circ w \in L \\ &\Leftrightarrow \quad w \in \{b\}^* \\ &\Leftrightarrow \quad a^m b^{n+1} \circ w \in L), \end{aligned}$$

also: $\forall m \in \mathbb{N} : \; v \sim_L^r a^m$ und daher $[v]_L \supseteq \{a^m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Bleibt noch zu zeigen: $[v]_L \subseteq \{a^m \mid m \in \mathbb{N}\}$

Sei $v' \in [v]_L$. Dann gilt wieder (1), und insbesondere $va \in L \Leftrightarrow v'a \in L$.

Also ist wegen $va = a^{m_0}a \in L$ auch $v'a \in L$, daher ist v' ohne b's, also $v' \in \{a^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ und daher: $[v]_L \subseteq \{a^m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Zusammen mit der vorher gezeigten Inklusion also:

$$\boxed{[v]_L = \{a^m \mid m \in \mathbb{N}\}}$$

2. Fall: $v \notin L$. Dann gilt:

$$\boxed{[v]_L = \{v' \in A^* \mid v' \notin L\}}$$

Beweis: Seien $v, v' \notin L$. Dann gilt

$$\forall w \in A^*(vw \notin L \wedge v'w \notin L), \tag{2}$$

also auch

$$\forall w \in A^*(vw \in L \Leftrightarrow v'w \in L)$$

Insgesamt hat also $\sim_L$ nur drei Äquivalenzklassen, nämlich

$$\{a\}^*\{b\}\{b\}^* \subset L, \qquad \{a\}^* \subset L, \quad \text{und} \quad A^* \setminus L.$$

□