3.3 Verallgemeinerte Quantifizierungen

Wie der Name andeutet, besagen die Quantoren Q in $Qx\varphi$ etwas über die Quantität aus, und zwar über die bei einer Interpretation $\mathcal{M}$ durch $\varphi(x)$ –hier einfachheitshalber ohne Parameter– definierte Menge $\varphi^{\mathcal{M}}$:

- $\exists x\varphi$ soll bei $\mathcal{M}$ wahr sein, wenn $\varphi^{\mathcal{M}}$ mindestens ein Objekt enthält, also Größe $\neq 0$ hat,
- $\forall x\varphi$ soll bei $\mathcal{M}$ wahr sein, wenn $\varphi^{\mathcal{M}}$ alle Objekte enthält, also maximale Größe hat.

Die Quantoren machen also eine Aussage über die Anzahl $|\varphi^{\mathcal{M}}|$ von φ^{M}. Wir betrachten im Folgenden modifizierte und verallgemeinerte Quantoren.

Zahlquantoren

Oft möchte man sagen, daß die Größe von φ^{M} *mindestens, höchstens* oder *genau* n ist, für eine bestimmte Zahl $n \in I\!N$. Dazu braucht man keine neuen Quantoren, sondern kann folgende Abkürzungen benutzen:

(a) $\exists^{\geq n} x\varphi := \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{1\leq i,j\leq n, i\neq j}(x_i \neq x_j \wedge \varphi(x/x_i))$

(b) $\exists^{\leq n}\varphi := \forall x_1 \dots \forall x_{n+1}(\bigwedge_{1\leq i\leq n+1} \varphi(x/x_i) \to \bigvee_{1\leq i<j\leq n+1} x_i = x_j)$

(c) $\exists^{=n} x\varphi := \exists^{\leq n} x\varphi \wedge \exists^{\geq n} x\varphi$.

Manchmal möchte man sagen, daß $\varphi^{\mathcal{M}}$ *endlich* oder *unendlich groß* ist. Das kann man nicht mehr in der Prädikatenlogik erster Stufe (in höheren Stufen geht es); dann führt man neue Quantoren ein:

(a) $\exists^{<\infty} x\varphi$ = *es gibt nur endlich viele x mit φ*

(b) $\exists^{\infty} x\varphi$ = *es gibt unendlich viele x mit φ.*

Für solche, nicht durch Abkürzung eingeführten Quantoren muß man die erlaubten Interpretationen so definieren, daß die Quantoren die gewünschte Bedeutung haben.

Neben diesen einstelligen Zahlquantoren kann man auch *vergleichende Zahlquantoren* betrachten:

(a) $Q^{<}x(\varphi, \psi)$ = *es gibt weniger x mit der Eigenschaft φ als solche mit ψ*

(b) $Q^{>}x(\varphi, \psi)$ = *es gibt mehr x mit der Eigenschaft φ als solche mit ψ*

(c) $Q^{=}x(\varphi, \psi)$ = *es gibt genau so viele x mit φ wie solche mit ψ*

Z.B. kann man bei einer Interpretation in $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, +, 1)$ (auch *ohne* $\exists^\infty$) durch

$$Q^= x(\exists y(x = y + y), \exists z(x = z + z + 1))$$

ausdrücken, daß es genau so viele gerade wie ungerade Zahlen gibt.

Beschränkte Quantoren

In der natürliche Sprache quantifiziert man –im Unterschied zur Mathematik– in derselben Aussage oft über Objekte verschiedener Arten: Gegenstände, Personen, Zeitpunkte, Orte usw., indem man sagt

> *alle Gegenstände, jede Person, zu manchen Zeiten, an vielen Orten, in den meisten Fällen, ...*

Die Quantoren laufen nicht *unbeschränkt* über eine 'Universum' aller Objekte, sondern werden auf Teilbereiche G, P, Z, O, F usw. beschränkt. Es wäre also natürlich, wenn man auch in der Prädikatenlogik statt der unbeschränkten Quantifizierung $\forall x$ und $\exists x$ die *auf einen Teilbereich P beschränkte Quantifizierung* $\forall x \in P$ und $\exists x \in P$ hätte. Die einander syntaktisch ähnlichen Aussagen

> *<u>Eine</u> Person, die im Parkverbot parkte, bekam keinen Strafzettel.*
> *Jede Person, die im Parkverbot parkte, bekam keinen Strafzettel.*

könnte man dann durch syntaktisch einander ebenfalls ähnliche Formeln

$$\exists x \in P\, \varphi \qquad \textit{bzw.} \qquad \forall x \in P\, \varphi \tag{20}$$

wiedergeben. Das macht man in der Prädikatenlogik nicht, da man die gewünschte Beschränkung auch durch die Abkürzungen

$$\exists x \in P\, \varphi := \exists x(P(x) \land \varphi) \qquad \textit{bzw.} \qquad \forall x \in P\, \varphi := \forall x(P(x) \to \varphi) \tag{21}$$

erreichen kann, wenn man einstellige Prädikate P für die entsprechenden Teilbereiche hat. (Beachte, daß die Formeln einander nicht mehr so stark gleichen!)

In mathematischen Texten findet man oft einen Spezialfall der beschränkten Quantoren:

$$\exists x < t\, \varphi := \exists x(x < t \land \varphi) \qquad \text{und} \qquad \forall x < t\, \varphi := \forall x(x < t \to \varphi) \tag{22}$$

wobei vorausgesetzt wird, daß $x \notin \mathit{frei}(t)$ ist. Hier ist der Teilbereich P durch die Formel $P(x) := x < t$ relativ zu einem Element t definiert.

Verallgemeinerte Quantoren

Nun gibt es in den natürlichen Sprachen viele Quantoren, die man nicht durch $\exists, \forall$ oder die bisher genannten Varianten davon ausdrücken kann, etwa *die mei-*

sten, viele, nur wenige, ein Drittel aller[10]. Daneben gibt es unter den Adverbien viele 'versteckte' Quantoren:

(a) *oft = zu vielen Zeitpunkten,*

(b) *häufig = in vielen Fällen,*

(c) *meistens = in den meisten aller Fälle,*

(d) *immer wieder = jedesmal, wenn ..., dann später noch einmal,*

(e) *immer öfter = in jedem Zeitraum ... zu mehr Zeitpunkten als in früheren Zeiträumen (gleicher Größe)*

Ob und wie man solche Quantoren definieren kann, ist nicht mehr offensichtlich. Man kann sich aber fragen, was denn überhaupt ein Quantor ist? Alle bisherigen einstelligen Quantoren $Qx\varphi$ drücken *Eigenschaften der Menge* $\varphi^{\mathcal{M}}$ *aus*, bei einer Interpretation $\mathcal{M}$, und die zweistelligen Quantoren $Qx(\varphi, \psi)$ drückten eine Beziehung zwischen $\varphi^{\mathcal{M}}$ und ψ^{M} aus. Daher definiert man:

Definition 3.16 Ein n*-stelliger verallgemeinerter Quantor* über einer Menge M ist eine n-stellige Relation $Q^M \subseteq 2^M \times \cdots \times 2^M$ zwischen Teilmengen von M. Die Bedeutung der Formel $Qx(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ bei einer Interpretation $\mathcal{M} = (M, Q^M, \ldots)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{M} \models Qx(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) :\iff (\varphi_1^{\mathcal{M}}, \ldots, \varphi_n^{\mathcal{M}}) \in Q^M.$$

Mit $\exists^M := \{\, A \mid A \subseteq M, A \neq \emptyset \,\}$ und $\forall^M := \{\, A \mid A \subseteq M, A = M \,\}$ kommt für $Q = \exists, \forall$ die gewünschte Bedeutung heraus.

Ein verallgemeinerter Quantor wird hier zunächst semantisch definiert; schreibt man $Q(A, B)$ für $(A, B) \in Q^M$, so hat man auch für Teilmengen von M, die *nicht* durch Formeln definierbar sind:

$$\exists(A) \iff A \neq \emptyset, \tag{23}$$
$$\forall(A) \iff A = M, \tag{24}$$
$$\exists^{\leq n}(A) \iff |A| \leq n, \tag{25}$$
$$\exists^{\infty}(A) \iff |A| = \infty, \tag{26}$$
$$Q^{<}(A, B) \iff |A| < |B|, \tag{27}$$
$$Q^{3*}(A, B) \iff |A| = 3|B|, \tag{28}$$

usw. wobei $Q^{3*}(A, B)$ für *es gibt dreimal soviele A wie B* steht.

[10] was aber nicht gleichbedeutend ist mit *jeder dritte*, wenn man sich damit (implizit) auf eine bestimmte Anordnung aller Objekte bezieht: *Jede zehnte Zahl* < 101 *ist durch 2 teilbar* bedeutet nicht dasselbe wie *ein Zehntel aller Zahlen* < 101 *ist durch 2 teilbar.*