1.7 Tableaux-Kalkül

Da beim Sequenzen-Kalkül i.a. „viele“ Formeln der Ober- und Untersequenzen gleich sind, braucht der Beweisbaum viel Platz, den man gern gering halten möchte. Anstatt ganze Sequenzen (also mehrere Formeln) an die Knoten des Baums zu schreiben, schreibt man im folgenden Tableaux-Kalkül jeweils nur eine (mit einem Wahrheitswert „signierte“) Formel an die Knoten des Baums, und liest die Formeln auf einem Pfad des Baums konjunktiv.

Eine zusammengesetzte Formel an einem Knoten wird zerlegt, indem man die direkten Teilformeln an die Folgeknoten schreibt: bei einer Fallunterscheidung stehen diese auf zwei verschiedenen (*altenativ* zu lesenden) Pfaden, sonst in zwei Knoten auf demselben Pfad.

Definition 1.22 Ist α eine Formel, so heißt $T(\alpha)$ eine (mit T) und $F(\alpha)$ eine (mit F) *signierte* Formel. Die Regeln des Tableaux-Kalküls für die Aussagenlogik sind:

$$\frac{T(\neg\alpha)}{F(\alpha)}\,(\neg T) \qquad\qquad \frac{F(\neg\alpha)}{T(\alpha)}\,(\neg F)$$

$$\frac{T(\alpha\wedge\beta)}{\begin{array}{c}T(\alpha)\\ T(\beta)\end{array}}\,(\wedge T) \qquad\qquad \frac{F(\alpha\wedge\beta)}{F(\alpha)\qquad F(\beta)}\,(\wedge F)$$

$$\frac{T(\alpha\vee\beta)}{T(\alpha)\qquad T(\beta)}\,(\vee T) \qquad\qquad \frac{F(\alpha\vee\beta)}{\begin{array}{c}F(\alpha)\\ F(\beta)\end{array}}\,(\vee F)$$

$$\frac{T(\alpha\to\beta)}{F(\alpha)\qquad T(\beta)}\,(\to T) \qquad\qquad \frac{F(\alpha\to\beta)}{\begin{array}{c}T(\alpha)\\ F(\beta)\end{array}}\,(\to F)$$

Die Regeln $(\wedge F), (\vee T), (\to T)$ heißen *verzweigende* Regeln, die andern *nicht verzweigend*.

Definition 1.23 Ein Pfad eines Baums, dessen Knoten mit signierten Formeln markiert sind, heißt *geschlossen*, wenn ein Knoten des Pfads mit $T(\bot)$ oder $F(\top)$ markiert ist, oder wenn es eine Formel α und zwei Knoten auf dem Pfad gibt, von denen einer mit $T(\alpha)$ und der andere mit $F(\alpha)$ markiert ist. Ein Pfad heiß *offen*, wenn er nicht geschlossen ist.

Die Regeln sind wie folgt als Erweiterungsregeln von Bäumen, deren Knoten mit signierten Formeln markiert sind, zu interpretieren:

(a) Ist ein Knoten auf einem von der Wurzel ausgehenden offenen Pfad mit der oberen signierten Formel α' einer verzweigenden Regel

$$\frac{\alpha'}{\beta' \qquad \gamma'}$$

markiert, so setze den Pfad am Endknoten um einen linken, mit β' markierten und um einen rechten, mit γ' markierten Nachfolgerknoten fort.

(b) Ist ein Knoten auf einem von der Wurzel ausgehenden offenen Pfad mit der oberen Formel α' einer nicht verzweigenden Regel

$$\frac{\alpha'}{\beta'} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\alpha'}{\begin{array}{c}\beta'\\ \gamma'\end{array}}$$

markiert, so setze den Pfad am Endknoten um einen bzw. zwei Nachfolgerknoten fort werden, der mit β' bzw. die mit β' und γ' markiert sind.

(c) Die Regeln (a) und (b) dürfen nicht auf einen Pfad angewendet werden, wenn es zwischen dem mit α' markierten Knoten und dem Endknoten des Pfades schon einen Knoten gibt, dessen Nachfolger mit der Formel β' bzw. den beiden Formeln β' und γ' markiert sind.[3]

Bedingung (c) dient nur dazu, unnötige Arbeit zu vermeiden. Sie sorgt insbesondere dafür, daß die Regeln nicht unendlich oft angewendet werden können.

Ausgehend von einer Wurzel mit Markierung α' konstruiert man mit diesen Regeln einen Baum, bis keine Regel mehr anwendbar ist. Wir werden gleich sehen, daß die offenen Pfaden solche Belegungen g ergeben, bei denen $[\![\alpha]\!]g$ dem Signum von α' entspricht. Die Konstruktion des Baums organisiert die Suche nach solchen Belegungen.

Beispiel 1.24 Einen Tableaux-Baum mit Wurzel

$$F((A \vee B) \wedge \neg B \wedge (A \to C \vee D) \to C)$$

erhalten wir, indem (von oben nach unten) komplexe Formeln zerlegt werden und den Regeln entsprechend die offenen Pfade fortgesetzt werden:

[3] Im Falle einer Verzweigungsregel sind die auf getrennten Pfaden liegenden direkten Nachfolger gemeint, sonst die beiden Nachfolger auf dem Pfad zum gegebenen Endknoten.

- $F(((A \vee B) \wedge \neg B \wedge (A \rightarrow C \vee D)) \rightarrow C)$
  - $T((A \vee B) \wedge \neg B \wedge (A \rightarrow C \vee D))$
    - $F(C)$
      - $T(A \vee B)$
        - $T(\neg B)$
          - $T(A \rightarrow C \vee D)$
            - $T(A)$
              - $F(B)$
                - $F(A)$
                  - geschlossen
                - $T(C \vee D)$
                  - $T(D)$
                  - $T(C)$
                    - geschlossen
            - $T(B)$
              - $F(B)$
                - geschlossen

Der offene Pfad von der Wurzel nach dem mit $T(D)$ markierten Blatt enthält die signierten atomaren Formeln $F(C), T(A), F(B), T(D)$. Die Belegung g mit $g(A) = g(D) = 1$ und $g(C) = g(B) = 0$ ergibt $[\![\alpha]\!]g = 0$, entsprechend dem Signum F an der Wurzelmarkierung $F(\alpha)$.

Satz 1.25 Sei t ein Baum, der durch Anwenden der obigen Regeln aus einer mit $T(\alpha)$ (bzw. $F(\alpha)$) markierten Wurzel entstanden ist, und auf den keine Regel mehr angewendet werden kann. Die Formel α ist genau dann erfüllbar (bzw. widerlegbar), wenn t einen offenen Pfad hat.

Beweis: Wie man an den Regeln sieht, gilt für alle Belegungen h der Aussagevariablen und signierte Formeln α', β', γ' mit zugehörgen unsignierten Formeln α, β, γ:

(a) Für jede nicht verzweigende Regel

$$\frac{\alpha'}{\beta'} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\alpha'}{\begin{array}{c}\beta' \\ \gamma'\end{array}}$$

ist $[\![\alpha]\!]h$ genau dann der der dem Signum (T bzw. F) von α' entsprechende Wert (1 bzw. 0), wenn $[\![\beta]\!]h$ dem Signum von β' entspricht, bzw. wenn $[\![\beta]\!]h$ dem Signum von β' *und* $[\![\gamma]\!]h$ dem Signum von γ' entspricht.

(b) Für jede verzweigende Regel

$$\frac{\alpha'}{\beta' \qquad \gamma'}$$

ist $[\![\alpha]\!]h$ genau dann der dem Signum (T bzw. F) von α' entsprechende Wert (1 bzw. 0), wenn $[\![\beta]\!]h$ dem Signum von β' *oder* $[\![\gamma]\!]h$ dem Signum von γ' entspricht.

Sei π ein offener Pfad des Baums t. Definiere eine Belegung g durch

$$g(A) := \begin{cases} 1, & \text{falls ein Knoten auf } \pi \text{ mit } T(A) \text{ markiert ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beh.: Für jede signierte Formel α' auf dem Pfad π gilt: das Signum von α' entspricht dem Wert $[\![\alpha]\!]g$ der zugehörigen unsignierten Formel α .

Beweis durch Induktion über den Aufbau von α:

$\alpha = \top$ oder $\alpha = \bot$: Dann ist $\alpha' = T(\top)$ oder $F(\bot)$, da π offen ist, und daraus folgt die Behauptung.

$\alpha = A$: Nach Wahl von g entspricht $[\![\alpha]\!]g$ dem Signum von α'. (Da π offen ist, kann α nicht mit unterschiedlichem Signum an Knoten von π vorkommen.)

$\alpha = (\beta \to \gamma)$: Angenommen, $\alpha' = T(\alpha)$. Nach Konstruktion des Baums liegt dann $\beta' = F(\beta)$ oder $\gamma' = T(\gamma)$ auf dem Pfad π (und zwar unterhalb von dem mit α' markierten Knoten). Nach Induktion ist $[\![\beta]\!]g = 0$ oder $[\![\gamma]\!]g = 1$. Also ist auch $[\![\alpha]\!] = 1$. Entsprechend argumentiert man, wenn $\alpha' = F(\alpha)$ ist.

$\alpha = (\beta \vee \gamma)$ oder $\alpha = (\beta \wedge \gamma)$: Analog wie bei $(\alpha \to \gamma)$.

Aus der nun bewiesenen Behauptung folgt offenbar die Aussage des Satzes, wenn α' die signierte Formel an der Wurzel ist. □