3 Prädikatenlogik erster Stufe

In der Prädikatenlogik (erster Stufe) erweitert man die Aussagenlogik in zweierlei Weisen:

(a) statt der Aussagenvariablen (oder zusätzlich zu ihnen) werden atomare Aussagen betrachtet, die aus einem Prädikat und einer Folge von Bezeichnungen für Objekte zusammengesetzt sind, und

(b) neben den Junktoren werden die *Quantoren* $\forall$ (*für alle Objekte*) und $\exists$ (*es gibt mindestens ein Objekt*) behandelt.

Man kann die Aussagenlogik auch nur um (a) erweitern, aber (b) macht ohne (a) keinen Sinn. Früher sprach man deshalb (etwas genauer) von der *Quantorenlogik*.

3.1 Syntax

Wir gehen von einer Menge *Var* von (Objekt- oder Individuen-)*variablen*, einer Menge Fn von Funktionszeichen und einer Menge Pr von Prädikatszeichen aus. Jedes $f \in Fn$ und jedes $p \in Pr$ hat eine *Stelligkeit*, $n_f \in I\!N$ bzw. $n_P \in I\!N$.

Definition 3.1 Die Menge der *Terme* ist die kleinste Menge *Tm* mit:

(a) jede Variable ist in *Tm*,

(b) ist $f \in Fn$ und sind $t_1, \dots, t_{n_f}$ in *Tm*, so ist $f(t_1, \dots, t_{n_f})$ in *Tm*.

Die Menge der *prädikatenlogischen Formeln* ist die kleinste Menge *Fml* mit:

(a) sind s und t Terme, so ist $s = t$ in *Fml*,

(b) ist $P \in Pr$ und sind $t_1, \dots, t_{n_P}$ Terme, so ist $P(t_1, \dots, t_{n_P})$ in *Fml*,

(c) sind φ und ψ in *Fml*, so auch $\neg\varphi$, $(\varphi \land \psi)$, $(\varphi \lor \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$,

(d) ist φ in *Fml* und x eine Variable, so sind auch $\exists x\varphi$ und $\forall x\varphi$ in *Fml*.

Bei zweistelligen Prädikaten schreibt man das Prädikatszeichen oft zwischen die Argumente, also sRt statt $R(s,t)$, insbesondere bei $s = t$ oder Vergleichsrelationen: $s < t$, $s \leq t$, $s > t$, $s \geq t$.

Die Formel $\neg s = t$ schreibt man meistens als $s \neq t$ oder zumindest als $\neg(s = t)$, damit sie besser lesbar ist; entsprechend: $s \not< t$, $s \not\leq t$, $s \not> t$, $s \not\geq t$.

Jeder Quantor in einer Formel hat einen *Wirkungsbereich* und *bindet* eine Variable. Für $Q \in \{\exists, \forall\}$ ist in $Qx\varphi$, grob gesagt, φ der Wirkungsbereich von Qx

und x die von $Q \in \{\forall, \exists\}$ gebundene Variable. Genauer gesagt ist der Wirkungsbereich von Qx in $Qx\varphi$ die Teilformel φ *außer* ihren Teilformeln der Form $\exists x\psi$ und $\forall x\psi$, und nur diejenigen Vorkommen von x in φ, die im Wirkungsbereich von Qx liegen, werden durch Qx gebunden.

Für viele Zwecke genügt es, zu wissen, welche Variablen irgendwo in einer Formel gebunden oder ungebunden (frei) vorkommen:

Definition 3.2 Die Menge $\mathit{frei}(\varphi)$ der *in φ frei vorkommenden* Variablen ist induktiv über den Aufbau der Formeln φ (und Terme t) definiert:

- $\mathit{frei}(t) = \mathit{Var}(t)$,
- $\mathit{frei}(s = t) = \mathit{frei}(s) \cup \mathit{frei}(t)$,
- $\mathit{frei}(P(t_1, \ldots, t_{n_P})) = \bigcup\{\, \mathit{frei}(t_i) \mid 1 \leq i \leq n \,\}$,
- $\mathit{frei}(\neg\varphi) = \mathit{frei}(\varphi)$,
- $\mathit{frei}(\varphi \wedge \psi) = \mathit{frei}(\varphi \vee \psi) = \mathit{frei}(\varphi \to \psi) = \mathit{frei}(\varphi) \cup \mathit{frei}(\psi)$,
- $\mathit{frei}(\exists x\varphi) = \mathit{frei}(\forall x\varphi) = \mathit{frei}(\varphi) \setminus \{x\}$.

Die Menge $\mathit{geb}(\varphi)$ der *in φ gebunden vorkommenden* Variablen ist ebenfalls induktiv über den Aufbau der Formeln φ (und Terme t) definiert:

- $\mathit{geb}(t) = \emptyset$,
- $\mathit{geb}(s = t) = \mathit{geb}(s) \cup \mathit{geb}(t)$,
- $\mathit{geb}(P(t_1, \ldots, t_{n_P})) = \bigcup\{\, \mathit{geb}(t_i) \mid 1 \leq i \leq n \,\}$,
- $\mathit{geb}(\neg\varphi) = \mathit{geb}(\varphi)$,
- $\mathit{geb}(\varphi \wedge \psi) = \mathit{geb}(\varphi \vee \psi) = \mathit{geb}(\varphi \to \psi) = \mathit{geb}(\varphi) \cup \mathit{geb}(\psi)$,
- $\mathit{geb}(\exists x\varphi) = \mathit{geb}(\forall x\varphi) = \mathit{geb}(\varphi) \cup \{x\}$.

Definition 3.3 Der *(Quantoren-) Rang* einer Formel φ, die maximale Anzahl der in φ in einander geschachtelt vorkommenden Quantoren, wird induktiv definiert durch:

- $\mathit{Rang}(\varphi) = 0$, falls φ eine atomare Formel ist,
- $\mathit{Rang}(\neg\varphi) = \mathit{Rang}(\varphi)$,
- $\mathit{Rang}(\varphi \wedge \psi) = \mathit{Rang}(\varphi \vee \psi) = \mathit{Rang}(\varphi \to \psi) = \max\{\mathit{Rang}(\varphi), \mathit{Rang}(\psi)\}$,
- $\mathit{Rang}(\exists x\varphi) = \mathit{Rang}(\forall x\varphi) = 1 + \mathit{Rang}(\varphi)$.

Beispiel 3.4 Für $\varphi = \forall x(\forall y(x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x = y \wedge y = z) \rightarrow \forall z\ x = z)$ ist $frei(\varphi) = \{z\}$ und $geb(\varphi) = \{x, y, z\}$; insbesondere ist hier $frei(\varphi) \cap geb(\varphi) \neq \emptyset$.

Der Quantorenrang von φ ist $Rang(\varphi) = 2$.

Bemerkung 3.5 In den natürlichen Sprachen hat man keine Variablen, aber Personalpronomina und Relativpronomina (sowie Pronominaladverbien) fungieren in gewisser Weise wie Variable. Zum Beispiel ist in

> *Die Leute, die sich nicht mögen, mögen auch keine anderen.*
> *Die Leute, die sich nicht grüßen, mögen sich nicht.*

der bestimmte Artikel 'die' implizit ein $\forall$-Quantor, und das Relativpronomen 'die' sowie das Reflexivpronomen 'sich' beziehen sich auf die durch diesen Quantor gebundenen (nicht explizit erscheinenden) Variablen.

Gleichzeitig ist das Reflexivpronomen 'sich' mehrdeutig: im ersten Satz ist 'sich' betont und meint 'sich selbst', im zweiten Satz ist 'sich' unbetont und meint 'einander'. Daher wird im ersten Satz implizit nur ein Quantor $\forall x$ benötigt, im zweiten dagegen zwei Quantoren, $\forall x \forall y$.

In anderen Fällen wird durch verschiedene Pronomina klar gemacht, wie die Bezüge gemeint sind:

> *Er wunderte sich, daß niemand sich entschuldigt hatte.*
> *Er wunderte sich, daß niemand ihn entschuldigt hatte.*

Beachte aber, daß hier der zweite Satz noch mehrdeutig ist: das Presonalpronomen 'ihn' im eingebetteten Teilsatz bezieht sich entweder auf das Subjekt 'er' des Hauptsatzes oder auf eine vorher genannte andere Person.

Da sich die Personalpronomina der eingebetteten Sätze auf Nomina von übergeordneten Sätzen beziehen, kann man auch diese als Operatoren ansehen, die gewisse Vorkommen von Personalpronomina binden. Aber es ist nicht offensichtlich und auch nicht eindeutig, was der Wirkungsbereich ist bzw. wie die Bindungen gemeint sind:

> *Herr Huber fragt sich, ob Herr Meyer sich wundert, daß niemand ihn entschuldigt hatte.*

Man kann mit 'ihn' Herrn Huber oder Herrn Meyer (oder einen Dritten) meinen.

Übersetzungen zwischen Aussagen der natürlichen Sprache und Formeln der Prädikatenlogik

Wir geben hier kein Übersetzungsprogramm an, sondern zeigen an einem Beispiel, wie Aussagen der natürlichen Sprache durch logische Formeln ausgedrückt werden.

Beispiel 3.6 Die Axiome der Mengenlehre nach Zermelo und Fraenkel geben wir zuerst in der Umgangssprache und dann durch logische Formeln wieder. Die logische Sprache enthält nur ein zweistelliges Prädikat, die Elementbeziehung $\in$. Die Mengen sind hier die Objekte, über die man spricht; daher stehen alle Variable für Mengen (und deren Elemente sind wieder Mengen).

Die meisten Axiome verlangen, daß bestimmte Mengen existieren; aber man hat in der logsichen Sprache keine Namen dafür. Im Vereinigungsaxiom z.B. wird zu jeder Menge x die Existenz der Menge

$$\bigcup x := \{\, z \mid \exists v(z \in v \wedge v \in x) \,\}$$

verlangt; da man in den Axiomen mit möglichst wenig Funktions- und Realtionszeichen auskommen will, hat man nur die Variable y zur Bezeichnung von $\{\, z \mid \exists v(z \in v \wedge v \in x) \,\}$, denn auch $\{\, z \mid \psi \,\}$ ist nur eine Abkürzung. Daher sieht das Vereinigungsaxiom zunächst etwas unverständlich aus. Für $x = \{v_1, v_2\}$ ist $\bigcup x$ die Menge, die man sonst meist $v_1 \cup v_2$ schreibt.

(a) (Extensionalitätsaxiom) Je zwei Mengen, die dieselben Elemente enthalten, sind gleich:

$$\forall x\ \forall y\ (\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y).$$

(b) (Aussonderungsschema, für jede Formel $\varphi(\vec{u}, x, z)$) Sondert man aus einer Menge x alle Elemente z aus, die die Eigenschaft $\varphi(\vec{u}, x, z)$ haben, so erhält man wieder eine Menge, y:

$$\forall \vec{u}\ \forall x\ \exists y\ \forall z(z \in y \ \leftrightarrow\ (z \in x \wedge \varphi(\vec{u}, x, z))).$$

Man bezeichnet die Gesamtheit der ausgesonderten Elemente auch mit $\{z \mid z \in x \wedge \varphi(\vec{u}, x, z)\}$ oder kurz $\{z \in x \mid \varphi(\vec{u}, x, z)\}$. Das Axiom besagt also:

$$\forall \vec{u}\ \forall x\ \text{“}\{z \in x \mid \varphi(\vec{u}, x, z)\} \text{ ist eine Menge”}.$$

(c) (Vereinigungsaxiom) Hat man eine Menge von Mengen und faßt man alle Elemente dieser Mengen zusammen, so erhält man wieder eine Menge:

$$\forall x\ \exists y\ \forall z(z \in y \ \leftrightarrow\ \exists v(v \in x \wedge z \in v)).$$

Mit anderen Worten:

$$\forall x\ \text{“}\{z \mid \exists v(v \in x \wedge z \in v)\} \text{ ist eine Menge”}.$$

(d) (Potenzmengenaxiom) Die Gesamtheit aller Teilmengen z einer Menge x bildet eine Menge, y:

$$\forall x\ \exists y\ \forall z(z \in y \ \leftrightarrow\ z \subseteq x).$$

Mit anderen Worten:

$$\forall x \text{ “}\{z \mid z \subseteq x\} \text{ ist eine Menge”}.$$

Hierbei verwenden wir die Abkürzung

$$z \subseteq x \;\;:\leftrightarrow\;\; \forall v(v \in z \;\rightarrow\; v \in x).$$

(e) (Ersetzungsaxiom) Ersetzt man die Elemente z einer Menge x durch andere, ihnen durch eine Funktion f zugeordnete Objekte $f(z)$, so erhält man wieder eine Menge:

$$\forall x\, \forall f(\text{“}f \text{ ist eine Funktion”} \rightarrow \text{ “}\{f(z) \mid z \in x\} \text{ ist eine Menge”}).$$

Auf die genaue Formulierung wollen wir hier verzichten, bis wir den Begriff der Funktion in der Mengenlehre ausdrücken können.

(f) (Fundierungsaxiom) Jede nicht leere Menge x enthält ein Element y, dessen Elemente z keine Elemente von x sind:

$$\forall x(\exists y(y \in x) \;\rightarrow\; \exists y \in x\; \forall z \in y\; z \notin x).$$

Hier haben wir von den Abkürzungen

$$\exists y \in x\; \varphi :\leftrightarrow\; \exists y(y \in x \wedge \varphi) \qquad \text{und} \qquad \forall y \in x\; \psi :\leftrightarrow\; \forall y(y \in x \rightarrow \psi)$$

Gebrauch gemacht.

(g) (Unendlichkeitsaxiom) Es gibt eine Menge mit unendlich vielen Elementen, genauer gesagt, es gibt eine Menge x, die die leere Menge enthält und mit jedem Element y auch die Vereinigungsmenge von $\{y\}$ mit y:

$$\exists x(\; \exists y \in x\; \forall z\; (z \notin y) \wedge\; \forall y \in x\; \exists z \in x\; \forall v(v \in z \leftrightarrow (v \in y \vee v = y))).$$

3.2 Semantik der Prädikatenlogik erster Stufe

Zur Interpreation der der L-*Terme* und L-*Formeln*, d.h. der Terme und Formeln der Prädikatenlogik mit dem Vokabular $L = Fn \cup Pr$ von Funktions- und Relationszeichen, brauchen wir L-Stukturen (zur Festlegung des Objektbereichs und der Interpretation der Funktions- und Relationszeichen) und Belegungen (zur Interpetation der Variablen):

Definition 3.7 Sei $L = Fn \cup Pr$ das Vokabular der Funktions- und Relationszeichen. Eine L-*Struktur* $\mathcal{M} = (M, f^{\mathcal{M}}, P^{\mathcal{M}})_{f \in Fn, P \in Pr}$ besteht aus

(a) einer Menge $M \neq \emptyset$,

(b) einer Funktion $f^{\mathcal{M}} : M^{n_f} \rightarrow M$ für jedes $f \in Fn$, und

(c) einer Relation $P^{\mathcal{M}} \subseteq M^{n_P}$ für jedes $P \in Pr$.

Eine *Belegung (der Variablen) über* $\mathcal{M}$ ist eine Abbildung $g : Var \to M$.

Eine *Relationalstruktur* ist eine L-Struktur mit $Fn = \emptyset$ (ggf. erlaubt man noch Individuenkonstanten, d.h. 0-stellige Funktionssymbole). Ein *Graph* ist eine Relationalstruktur $\mathcal{M} = (M, K)$ mit einer 2-stelligen Relation $K \subseteq M \times M$; jedes $(a, b) \in K$ heißt *Kante*. Eine *Algebra* ist eine L-Struktur mit $Pr = \emptyset$.

Beispiel 3.8 $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, 0, 1, +, *)$ und $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, 0, 1, +, 0)$ sind Algebren derselben Sprache $L = Fn = \{0, 1, +, *\}$, wobei $0, 1$ 0-stellig und $+, *$ 2-stellig sind.

Sei Σ^* die Menge aller endlichen Folgen (oder *Wörter*) über der Menge (oder dem *Alphabet*) Σ, und $\leq_{lex}$ die lexikographische Anordnung auf Σ^*, relativ zu einer Anordnung $<$ auf Σ. Dann ist $\mathcal{M} = (\Sigma^*, \leq_{lex})$ eine Relationalstruktur.

Definition 3.9 Der *Wert* $[\![t]\!]_g^{\mathcal{M}}$ eines Terms t in der Struktur M bezüglich der Belegung g ist induktiv über den Aufbau der Terme definiert durch:

(a) $[\![x]\!]_g^{\mathcal{M}} = g(x) \in M$,

(b) $[\![f(t_1, \ldots, t_{n_f})]\!]_g^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}}([\![t_1]\!]_g^{\mathcal{M}}, \ldots, [\![t_{n_f}]\!]_g^{\mathcal{M}})$.

Der *Wert* $[\![\varphi]\!]_g^{\mathcal{M}}$ einer Formel φ in der Struktur $\mathcal{M}$ bezüglich der Belegung g ist induktiv über den Aufbau der Formeln definiert durch:

(a) $[\![s = t]\!]_g^{\mathcal{M}} = \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![s]\!]_g^{\mathcal{M}} = [\![t]\!]_g^{\mathcal{M}}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$

(b) $[\![P(t_1, \ldots, t_{n_P})]\!]_g^{\mathcal{M}} = \begin{cases} 1, & \text{falls } ([\![t]\!]_1, \ldots, [\![t]\!]_{n_P}) \in P^{\mathcal{M}}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$

(c) $[\![\neg\varphi]\!]_g^{\mathcal{M}} = 1 - [\![\varphi]\!]_g^{\mathcal{M}}$,

(d) $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_g^{\mathcal{M}} = [\![\varphi]\!]_g^{\mathcal{M}} \sqcap [\![\psi]\!]_g^{\mathcal{M}}$,

(e) $[\![(\varphi \vee \psi)]\!]_g^{\mathcal{M}} = [\![\varphi]\!]_g^{\mathcal{M}} \sqcup [\![\psi]\!]_g^{\mathcal{M}}$,

(f) $[\![(\varphi \to \psi)]\!]_g^{\mathcal{M}} = [\![\varphi]\!]_g^{\mathcal{M}} \sqsubseteq [\![\psi]\!]_g^{\mathcal{M}}$,

(g) $[\![\exists x\varphi]\!]_g^{\mathcal{M}} = \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![\varphi]\!]_{g(x/a)}^{\mathcal{M}} = 1 \text{ für mindestens ein } a \in M, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$

(h) $[\![\forall x\varphi]\!]_g^{\mathcal{M}} = \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![\varphi]\!]_{g(x/a)}^{\mathcal{M}} = 1 \text{ für alle } a \in M, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Hierbei ist $g(x/a)$ die Belegung h mit $h(y) = \begin{cases} a, & \text{falls } y = x, \\ g(y) & \text{sonst.} \end{cases}$

Wie bei der Auswertung von Formeln der Aussagenlogik hängen der Wert von φ nicht von allen Details einer Interpretation oder Belegung ab:

Lemma 3.10 (Koinzidenzlemma) Der Wert eines Terms t bzw. einer Formel φ bei der Interpretation $\mathcal{M}$ und der Belegung g hängt nicht von den Werten $g(x)$ für $x \notin \mathit{frei}(t)$ bzw. $x \notin \mathit{frei}(\varphi)$ ab, und auch nicht von den Interpretationen $f^{\mathcal{M}}$ und $P^{\mathcal{M}}$ der Funktions- und Prädikatszeichen f und P, die in t bzw. φ nicht vorkommen.

Beweis: Durch Induktion über den Term- und Formelaufbau. (Übung!) □

Man schreibt $[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ für eine Belegung g mit $g(x_1) = a_1, \ldots, g(x_n) = a_n$, wenn klar ist, daß es auf die Werte von g auf anderen Variablen nicht ankommt, also für $\mathit{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ z.B.

$$[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}_{[x_1/a_1,\ldots,x_n/a_n]} \quad \text{statt} \quad [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}_{g}.$$

Man schreibt $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, wenn $\mathit{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ und φ als Aussage über n Objekte betrachtet wird. Für $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ benutzt man auch

$$\mathcal{M} \models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n] \quad :\iff \quad [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}_{[x_1/a_1,\ldots,x_n/a_n]} = 1 \tag{18}$$

$$\mathcal{M} \not\models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n] \quad :\iff \quad [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}_{[x_1/a_1,\ldots,x_n/a_n]} = 0 \tag{19}$$

gelesen: *In $\mathcal{M}$ gilt φ bei der Belegung* $[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ für (18).

Definition 3.11 Eine Relation $R \subseteq M^n$ auf dem Objektbereich einer L-Struktur $\mathcal{M}$ heißt (mit den Parametern $a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}$) *definierbar*, wenn es eine L-Formel $\varphi(a_1, \ldots, a_{n+k})$ gibt, so daß

$$R = \{\, (a_1, \ldots, a_n) \mid \mathcal{M} \models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_{n+k}/a_{n+k}] \,\}.$$

Ist hierin $k = 0$, so heißt R *ohne Parameter definierbar*.

Die durch $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ohne Parameter definierte Relation bezeichnen wir mit

$$\varphi^{\mathcal{M}} := \{\, (a_1, \ldots, a_n) \mid \mathcal{M} \models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n] \,\}$$

Beispiel 3.12 In $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist die Menge $P = \{\, r \mid r \in \mathbb{R}, 0 < r \,\}$ der positiven rellen Zahlen ohne Parameter definierbar, nämlich durch

$$\varphi(x) := \exists y(x = y \cdot y) \wedge \exists z(x \cdot z \neq x).$$

Denn eine reelle Zahl ist genau dann positiv, wenn sie eine Quadratzahl, aber nicht die 0 ist.

Beispiel 3.13 Sei $\Sigma = \{a, \dots, z, A, \dots, Z\}$ das Alphabet der üblichen Buchstaben und

$$\mathcal{M} = (\Sigma^*, \cdot^{\mathcal{M}}, V^{\mathcal{M}}, \dots, Adv^{\mathcal{M}})$$

die Struktur, bei der $\cdot^{\mathcal{M}}$ die Verkettung von Wörtern (=Büchstabenfolgen) ist und $V^{\mathcal{M}}, N^{\mathcal{M}}, P^{\mathcal{M}}, Adn^{\mathcal{M}}, Adv^{\mathcal{M}}$ die Mengen der deutschen Verben, Nomina, Präpositionen, Adjektive und Adverbien (bzw. die Menge ihrer Vollformen) sind. Wahrscheinlich ist die Menge $S \subseteq \Sigma^*$ der deutschen Aussagesätze[9] in $\mathcal{M}$ nicht definierbar, aber ein genauer Beweis dafür ist (mir) nicht bekannt.

Definition 3.14 Zwei L-Strukturen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ sind zueinander *elementar k-äquivalent*, in Zeichen: $\mathcal{M} \equiv_k \mathcal{M}'$, wenn

$$\mathcal{M} \models \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{M}' \models \varphi$$

für alle L-Aussagen φ mit Quantorenrang $\leq k$ gilt. $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ sind *elementar äquivalent* zu einander, kurz: $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}'$, wenn $\mathcal{M} \equiv_k \mathcal{M}'$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt.

$\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}'$ besagt, daß sich $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ nicht durch elementare, d.h. erststufige, Aussagen unterscheiden lassen.

Beispiel 3.15 Sei $\mathcal{N}_m = (N_m, , <^{\mathcal{N}_m})$ mit $N_m := \{0, 1, \dots, m-1\}$ und $<^{\mathcal{N}_m}$ die Einschränkung von $<^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ auf $N_m \times N_m$. Wir werden später noch sehen, daß $\mathcal{N}_m \equiv_k \mathcal{N}_{m+1}$ ist, wenn $m > 2^{k+1}$ ist.

Daraus folgt: durch keine erststufige Aussage mit $L = \{<\}$ kann man

„$<$ ist eine lineare Anordnung einer <u>geraden</u> Anzahl von Objekten“

ausdrücken. Denn angenommen, man kann es durch φ ausdrücken. Sei $k = Rang(\varphi)$ und $m > 2^{k+1}$ eine gerade Zahl. Dann ist N_m eine lineare Anordnung einer geraden Anzahl von Objekten, und folglich $\mathcal{N}_m \models \varphi$. Da $m+1$ ungerade ist, erhalten wir $\mathcal{N}_{m+1} \models \neg\varphi$. Aber wegen $\mathcal{N}_m \equiv_k \mathcal{N}_{m+1}$ müßte

$$\mathcal{N}_m \models \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{N}_{m+1} \models \varphi$$

gelten, ein Widerspruch. Also gibt es ein solches φ nicht.

[9] mit beliebig tiefer Schachtelung (oder beliebig langen Konjunktionen) von Teilsätzen oder Nominalausdrücken usw. – denn sonst ist S endlich und zumindest mit Parametern definierbar.