1 Aussagenlogik

1.1 Syntax

Sei $At = \{ A_i \mid i \in I\!N \}$ eine unendliche Menge von „Aussagevariablen“.

Definition 1.1 Die Menge der *aussagenlogischen Formeln* ist die kleinste Menge F mit

(a) $\{\top, \bot\} \subseteq F$, d.h. die beiden Aussagekonstanten $\bot$ und $\top$ sind in F,

(b) $At \subseteq F$, d.h. jede Aussagenvariable ist in F,

(c) F ist abgeschlossen unter $\neg, \wedge, \vee$ und $\to$, d.h. sind α und β in F, so auch $\neg\alpha$, $(\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta)$ und $(\alpha \to \beta)$.

1.2 Semantik

Definition 1.2 Mit $\mathcal{B}_2 := (\{0,1\}, \sqcup, \sqcap, , -)$ ist die Boole'sche Algebra der Wahrheitswerte gemeint (0 für *falsch*, 1 für *wahr*), wobei die Operationen durch

$$\begin{array}{c|cc} \sqcup & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \sqcap & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} - & \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \tag{1}$$

definiert sind.

Definition 1.3 Eine *Belegung* ist eine Funktion $g : At \to B_2$. Der *Wert* $[\![\alpha]\!]g$ der Formel α *unter der Belegung* g ist induktiv durch

$$\begin{aligned} [\![\top]\!]g &:= 1, & (2)\\ [\![\bot]\!]g &:= 0. & (3)\\ [\![\alpha]\!]g &:= g(\alpha), & (4)\\ [\![(\alpha \wedge \beta)]\!]g &:= [\![\alpha]\!]g \sqcap [\![\beta]\!]g, & (5)\\ [\![(\alpha \vee \beta)]\!]g &:= [\![\alpha]\!]g \sqcup [\![\beta]\!]g, & (6)\\ [\![(\alpha \to \beta)]\!]g &:= -[\![\alpha]\!]g \sqcup [\![\beta]\!]g & (7) \end{aligned}$$

definiert.

Lemma 1.4 (Koinzidenzlemma) Sei $V(\alpha)$ die Menge der in α vorkommenden Aussagevariablen. Sind g_1, g_2 zwei Belegungen mit $g_1(A_i) = g_2(A_i)$ für alle $A_i \in V(\alpha)$, so gilt $[\![\alpha]\!]g_1 = [\![\alpha]\!]g_2$, d.h. stimmen die Belegungen auf den Variablen von α überein, so stimmen auch die Werte von α unter den Belegungen überein.

Beweis: Durch Induktion über den Formelaufbau. (Übungsaufgabe) □

Definition 1.5 Eine Formel γ ist *allgemeingültig* oder eine *Tautologie*, wenn sie bei jeder Belegung den Wert 1 hat. Eine Formel γ (oder eine Formelmenge Γ) ist *erfüllbar*, wenn sie (bzw. alle $\gamma \in \Gamma$) bei mindestens einer Belegung den Wert 1 hat. Zwei Formeln α und β sind *äquivalent*, geschrieben: $\alpha \equiv \beta$, wenn ihre Werte bei allen Belegungen übereinstimmen.

Satz 1.6 Es gibt ein Verfahren, mit dem man für jede Formel α feststellen kann, ob α allgemeingültig ist.

Beweis: Man stellt fest, welche Aussagenvariablen in α vorkommen; dies seien etwa $A_1, \ldots, A_n$. Nach dem Koinzidenzlemma hat α unter allen Belegungen, die auf $A_1, \ldots, A_n$ übereinstimmen, denselben Wert. Daher genügt es, die Tabelle

A_1	$\cdots$	A_{n-1}	A_n	α
0	$\cdots$	0	0	$f_\alpha(0, \ldots, 0)$
0	$\cdots$	0	1	$f_\alpha(0, \ldots, 1)$
	$\vdots$			$\vdots$
1	$\cdots$	1	1	$f_\alpha(1, \ldots, 1)$

aufzustellen, wobei $f_\alpha(b_1, \ldots, b_n) := [\![\alpha]\!]g$ für die Belegungen g mit $g(A_1) = b_1, \ldots, g(A_n) = b_n$. Falls in der rechten Spalte stets der Wert 1 auftritt, ist α allgemeingültig, sonst nicht. □

Für große Formeln ist das Verfahren zu aufwendig: die Tabelle hat 2^n Zeilen. Es sind aber keine Verfahren bekannt, die für beliebige Formeln mit weniger Aufwand die Antwort liefern.

Den Wert $[\![\alpha]\!]g$ einer Formel α unter der Belegung g berechnet man praktischerweise so, daß man die Formel als Baum darstellt, dann die mit A_i beschrifteten Blätter mit dem Wert $g(A_i)$ markiert, und anschließend die inneren Knoten k des Baums mit dem Wert markiert, der sich aus dem Wert der direkten Teilbäume durch Anwenden der Wahrheitsfunktion $-, \sqcap, \sqcup$ ergibt, der dem Junktor $\neg, \wedge, \vee$ am Knoten k entspricht.

Um die obige Tabelle aufzustellen, schreibt man praktischerweise die Werte der Teilformeln in einer Spalte unter den Hauptjunktor der Teilformel.

Definition 1.7 Sei $\alpha(X/\delta)$ die Formel, die aus α entsteht, wenn man jedes Vorkommen der Aussagenvariable X duruch die Formel δ ersetzt.

Lemma 1.8 (Ersetzungslemma) Seien α, β, γ aussagenlogische Formeln. Wenn $\beta \equiv \gamma$ ist, so ist $\alpha(X/\beta) \equiv \alpha(X/\gamma)$.

Beweis: Durch Induktion über den Formelaufbau. (Übung!) □

Definition 1.9 Sei T eine Menge von Formeln. Eine Belegung g *erfüllt* T, wenn $[\![\gamma]\!]g = 1$ für jedes $\gamma \in T$. Die Formel α *folgt aus* T, geschrieben $T \models \alpha$, wenn jede Belegung, die T erfüllt, auch α erfüllt.