3.5 Normalformen

Wie in der Aussagenlogik gibt es auch für die Formeln der Prädikatenlogik bestimmte Normalformen. Zuerst brauchen wir einige Hilfsmittel:

Lemma 3.21 Folgende Formeln sind logisch äquivalent zu einander:

(a) Vertauschung von Negation und Quantoren:

- (a) $\neg\forall x\varphi$ und $\exists x\neg\varphi$,
- (b) $\neg\exists x\varphi$ und $\forall x\neg\varphi$,

(b) Vertauschung von gleichartigen Quantoren:

- (a) $\forall x\forall y\varphi$ und $\forall y\forall x\varphi$,
- (b) $\exists x\exists y\varphi$ und $\exists y\exists x\varphi$,

(c) Verschmelzung von gleichen Quantoren:

- (a) $\forall x\forall x\varphi$ und $\forall x\varphi$,
- (b) $\exists x\exists x\varphi$ und $\exists x\varphi$,

(d) Distribution von Quantoren über Junktoren:

- (a) $(\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)$ und $\forall x(\varphi \wedge \psi)$,
- (b) $(\exists x\varphi \vee \exists x\psi)$ und $\exists x(\varphi \vee \psi)$,

(e) (Harmloses) Erweitern des Wirkungsbereichs: falls $x \notin \mathit{frei}(\psi)$:

- (a) $(\forall x\varphi \wedge \psi)$ und $\forall x(\varphi \wedge \psi)$,
- (b) $(\forall x\varphi \vee \psi)$ und $\forall x(\varphi \vee \psi)$,
- (c) $(\exists x\varphi \wedge \psi)$ und $\exists x(\varphi \wedge \psi)$,
- (d) $(\exists x\varphi \vee \psi)$ und $\exists x(\varphi \vee \psi)$,
- (e) $(\psi \to \forall x\varphi)$ und $\forall x(\psi \to \varphi)$,
- (f) $(\psi \to \exists x\varphi)$ und $\exists x(\psi \to \varphi)$,
- (g) $(\forall x\varphi \to \psi)$ und $\exists x(\varphi \to \psi)$,
- (h) $(\exists x\varphi \to \psi)$ und $\forall x(\varphi \to \psi)$,

Beweis: Durch nachrechnen. Wir prüfen z.B. den letzten Fall, daß

$$(\exists x_{n+1}\varphi \to \psi) \leftrightarrow \forall x_{n+1}(\varphi \to \psi)$$

allgemeingültig ist, wenn $x \notin \mathit{frei}(\psi)$:

$\Rightarrow$: Sei $\mathcal{M}$ eine Interpretation und $[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ eine Belegung mit

$$\mathcal{M} \models (\exists x_{n+1}\varphi \to \psi)[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]. \tag{29}$$

Um $\mathcal{M} \models \forall x_{n+1}(\varphi \to \psi)[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ zu zeigen, wählen wir ein beliebiges $a_{n+1} \in M$. Falls $\mathcal{M} \not\models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_{n+1}/a_{n+1}]$, so ist nichts zu zeigen; also gelte auch $\mathcal{M} \models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_{n+1}/a_{n+1}]$. Insbesondere gilt dann $\mathcal{M} \models \exists x_{n+1}\varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$, und mit (29) folgt $\mathcal{M} \models \psi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$, was wegen $x_{n+1} \notin \mathit{frei}(\psi)$ und dem Koinzidenzlemma zu

$$\mathcal{M} \models \psi[x_1/a_1, \ldots, x_{n+1}/a_{n+1}]$$

äquivalent ist. Damit ist $\mathcal{M} \models \forall x_{n+1}(\varphi \to \psi)[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ gezeigt.

$\Leftarrow$: Sei $\mathcal{M}$ eine Interpretation und $[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ eine Belegung mit

$$\mathcal{M} \models \forall x_{n+1}(\varphi \to \psi)[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]. \tag{30}$$

Um $\mathcal{M} \models (\exists x_{n+1}\varphi \to \psi)[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ zu zeigen, können wir

$$\mathcal{M} \models \exists x_{n+1}\varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$$

annehmen. Also gibt es ein $a_{n+1} \in M$ mit $\mathcal{M} \models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_{n+1}/a_{n+1}]$. Nach (30) gilt dafür auch $\mathcal{M} \models \psi[x_1/a_1, \ldots, x_{n+1}/a_{n+1}]$, was wegen dem Koinzidenzlemma wieder dasselbe bedeutet wie

$$\mathcal{M} \models \psi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n].$$

Damit ist $\mathcal{M} \models (\exists x_{n+1}\varphi \to \psi)[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ gezeigt. □

Beispiel 3.22 Man überlege sich, daß folgende Formeln allgemeingültig sind, aber die Umkehrungen nicht:

(a) $\exists x \forall y\, \varphi \to \forall y \exists x\, \varphi$

(b) $(\forall x\varphi \lor \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \lor \psi)$

(c) $\exists x(\varphi \land \psi) \to (\exists x\varphi \land \exists x\psi)$

Wir wollen Lemma 3.21 dazu benutzen, um alle Quantoren in einer Formel „nach vorne zu ziehen", d.h. die allgemeingültigen Formeln wie

$$(\forall x\varphi \land \forall x\psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \land \psi)$$

dazu benutzen, um Quantoren in Teilformeln durch Quantoren in umfassenden Formeln zu ersetzen. Dabei stört aber die Nebenbedingung $x \notin \mathit{frei}(\psi)$ in den Äquivalenzen wie

$$(\exists x\varphi \to \psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \to \psi).$$

Falls $x \in \mathit{frei}(\psi)$ ist, ersetzt man die gebundene Variable x von $\exists x\varphi$ durch eine Variable $y \notin \mathit{frei}(\psi) \cup \mathit{frei}(\varphi)$, und benutzt dann

$$(\exists y(\varphi(x/y)) \to \psi) \leftrightarrow \forall y(\varphi(x/y) \to \psi).$$

Genauer gesagt:

Definition 3.23 Sei φ eine Formel, x eine Variable und s ein Term. Definiere $t(x/s)$ bzw. $\varphi(x/s)$, *die Ersetzung der freien Vorkommen von x in t bzw. φ durch s*, induktiv durch

$$\begin{array}{rcl}
z(x/s) & := & \begin{cases} z, & \text{falls } z \neq x \\ s, & \text{sonst,} \end{cases} \\
f(t_1,\ldots,t_{n_f})(x/s) & := & f(t_1(x/s),\ldots,t_{n_f}(x/s)), \\
P(t_1,\ldots,t_{n_p})(x/s) & := & P(t_1(x/s),\ldots,t_{n_P}(x/s)), \\
\neg\varphi\,(x/s) & := & \neg(\varphi(x/s)), \\
(\varphi\wedge\psi)(x/s) & := & (\varphi(x/s)\wedge\psi(x/s)), \\
\exists z\varphi\,(x/s) & := & \begin{cases} \exists z\varphi, & \text{falls } x = z, \\ \exists z(\varphi(x/s)), & \text{falls } x \neq z \notin \mathit{frei}(s), \\ \exists v(\varphi(z/v)(x/s)), & \text{falls } x \neq z \in \mathit{frei}(s), \\ & v \notin \mathit{frei}(s,x,\varphi), \end{cases}
\end{array}$$

und ebenso für $\forall z\varphi\,(x/y)$.

Im letzten Fall wird zuerst in $\exists z\varphi$ die gebundenen Variable z durch eine neue (im jeweiligen Kontext noch nicht benutzte) Variable v ersetzt; das nennt man auch *gebundene Umbenennung*.

Beispiel 3.24 Die Variablen x, y, z, v seine paarweise verschieden. Dann ist

$$\begin{array}{rl}
\multicolumn{2}{l}{\exists z((z\leq y\vee x\leq z)\to\forall y(y\leq x\to\exists x\,R(x,y,z)))(x/y)} \\
= & \exists z((z\leq y\vee x\leq z)(x/y)\to\forall y(y\leq x\to\exists x\,R(x,y,z))(x/y)) \\
= & \exists z((z\leq y\vee y\leq z)\to\forall y(y\leq x\to\exists x\,R(x,y,z))(x/y)) \\
= & \exists z((z\leq y\vee y\leq z)\to\forall v((y\leq x\to\exists x\,R(x,y,z))(y/v)(x/y))) \\
= & \exists z((z\leq y\vee y\leq z)\to\forall v((v\leq x\to\exists x\,R(x,v,z))(x/y))) \\
= & \exists z((z\leq y\vee y\leq z)\to\forall v((v\leq x)(x/y)\to(\exists x\,R(x,v,z))(x/y))) \\
= & \exists z((z\leq y\vee y\leq z)\to\forall v(v\leq y\to\exists x\,R(x,v,z)))
\end{array}$$

Durch gebundene Umbenennung erhält man stets äquivalente Formeln:

Lemma 3.25 Falls $y\notin \mathit{frei}(\varphi)$, so sind $\exists x\varphi$ und $\exists y(\varphi(x/y))$ logisch äquilvalent, ebenso $\forall x\varphi$ und $\forall y(\varphi(x/y))$.

Beweis: Übung. □

Für die Ersetzung einer Variable durch einen Term kann man durch Induktion über den Formelaufbau leicht zeigen:

Lemma 3.26 Für jede Formel φ und jeden Term s gilt:

$$[\![\varphi(x/s)]\!]^{\mathcal{M}}_g = [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}_{g(x/[\![s]\!]^{\mathcal{M}}_g)}.$$

Auch das Ersetzungslemma der Aussagenlogik setzt sich auf die Prädikatenlogik fort. Sei $\varphi(\psi_1/\psi_2)$ die Formel, die durch Ersetzen (aller Vorkommen) der Teilformel ψ_1 durch ψ_2 entsteht.

Lemma 3.27 (Ersetzungslemma) Sind ψ_1 und ψ_2 logisch äquivalent, so ist φ zu $\varphi(\psi_1/\psi_2)$ logisch äquivalent.

Den Beweis lassen wir aus: da (bei jeder Interpretation und Belegung) der Wert einer Formel nur von den Werten, aber nicht von der Gestalt der Teilformeln abhängt, ist es einleuchtend, daß man eine Teilformel durch eine äquivalente Formel austauschen kann, ohne den Wert der gesamten Formel zu ändern.

Pränexe Normalform

Die am häufigsten benutzte Normalform besteht darin, alle Quantoren aus dem Wirkungsbeich von Junktoren zu beseitigen, indem man den Wirkungsbereich der Quantoren (scheinbar) erweitert:

Definition 3.28 Eine Formel φ ist in *pränexer Form*, wenn es ein $k \in I\!N$, Quantoren $Q_1, \ldots, Q_k \in \{\forall, \exists\}$ und eine quantorenfreie Formel ψ gibt, so daß

$$\varphi = Q_1 x_1 \ldots Q_k x_k \psi.$$

Eine *pränexe Normalform von* φ ist eine zu φ logisch äquivalente Formel in pränexer Form.

Satz 3.29 Zu jeder Formel φ kann man eine pränexe Normalform (mit denselben freien Variablen) angeben.

Beweis: durch Induktion über den Formelaufbau. Sei $\overline{\forall} := \exists$ und $\overline{\exists} := \forall$.

(a) φ ist atomar: Dann ist φ quantorenfrei, also selbst schon in pränexer Form.

(b) $\neg\varphi$: Sei $\varphi^{PNF} := Q_1 x_1 \ldots Q_k x_k \psi$ eine pränexe Normalform von ψ. Nach dem Ersetzungslemma sind dann $\neg\varphi$ und $\neg(\varphi^{PNF})$ äquivalent. Mit Lemma 3.21 können wir die Quantoren aus dem Wirkungsbereich der Negation herausziehen: $\neg Q_1 x_1 \ldots Q_k x_k \psi$ ist äquivalent zu $\overline{Q}_1 x_1 \neg Q_2 x_2 \ldots Q_k x_k \psi$, $\ldots$, und zu $\overline{Q}_1 x_1 \ldots \overline{Q}_k x_k \neg\psi$. Da $\neg\psi$ quantorenfrei ist, ist dies eine pränexe Normalform $(\neg\varphi)^{PNF}$ von $\neg\varphi$.

(c) $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$: Seien

$$Q_1 x_1 \ldots Q_k x_k \psi_1 \quad \text{und} \quad Q_{k+1} x_{k+1} \ldots Q_{k+m} x_{k+m} \psi_2$$

induktiv schon pränexe Normalformen φ_1^{PNF} und φ_2^{PNF} der direkten Teilformeln. Dabei können wir –nach gebundener Umbenennung– annehmen, daß die Mengen der gebundenen Variablen der Teilformeln zu einander (und zu den freien Variablen) disjunkt sind. Durch Anwenden von Lemma 3.21 erhalten wir eine äquivalente Formel

$$Q_1 x_1 \ldots Q_k x_k Q_{k+1} x_{k+1} \ldots Q_{k+m} x_{k+m} (\psi_1 \wedge \psi_2),$$

die als $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)^{PNF}$ geeignet ist. Man beachte, daß wir die Quantoren auch in jeder anderen Reihenfolge hätten vorziehen können.

(d) $(\varphi_1 \to \varphi_2)$: Das geht wie im vorigen Fall, allerdings mit

$$\overline{Q}_1 x_1 \ldots \overline{Q}_k x_k Q_{k+1} x_{k+1} \ldots Q_{k+m} x_{k+m} (\psi_1 \to \psi_2),$$

d.h. die Quantoren Q_i der pränexen Normalform von φ_1 müssen zu $\overline{Q_i}$ geändert werden.

(e) $\exists x \varphi$: Dann ist $\exists x (\varphi^{PNF})$ eine pränexe Normalform von $\exists x \varphi$.

Die Fälle $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ und $\forall x \varphi$ gehen analog. □

In vielen Fällen kann man einfachere Quantorenpräfixe erreichen als im Beweis angegeben, wenn man die anderen Teile von Lemma 3.21 ausnutzt, um Quantoren von Teilformeln zusammenzufassen.

Beispiel 3.30 Sei $x \notin \mathit{frei}(\varphi_3)$ und (einfachheitshalber) $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ quantorenfrei. Dann ist

$$(\forall x \varphi_1 \wedge (\exists x \varphi_2 \to \varphi_3))$$

logisch äquivalent zu $(\forall x \varphi_1 \wedge \forall x (\varphi_2 \to \varphi_3))$ und folglich auch zu

$$\forall x (\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \to \varphi_3)).$$

Das Vorgehen aus dem Beweis nimmt eine gebundene Umbennennung vor und erzeugt dann

$$\forall x \forall y (\varphi_1 \wedge (\varphi_2(x/y) \to \varphi_3)),$$

also eine Formel mit zwei Quantoren im Präfix, statt wie oben nur einen.

Skolem'sche Normalform

Eine andere häufig nützliche Normalform besteht darin, Quantoren auf Kosten neuer Funktionszeichen zu beseitigen.

Lemma 3.31 Sei $\forall x_1 \ldots \forall x_k \exists y \varphi$ eine L-Formel mit $\mathit{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_k, y\}$, $\mathcal{M}$ eine L-Struktur, und f ein in L nicht vorkommendes k-stelliges Funktionszeichen. Dann sind äquivalent:

(a) $\mathcal{M} \models \forall x_1 \ldots \forall x_k \exists y \varphi$.

(b) Es gibt eine Funktion $f^{\mathcal{M}} : M^k \to M$ mit

$$(\mathcal{M}, f^{\mathcal{M}}) \models \forall x_1 \dots x_k\, (\varphi(y/f(x_1, \dots, x_k))).$$

Beweis: Für alle $a_1, \dots, a_k \in M$ gilt

$$(\mathcal{M}, f^{\mathcal{M}}) \models \varphi(f(x_1, \dots, x_k)/y)[x_1/a_1, \dots, x_k/a_k]$$

nach Lemma 3.26 genau dann, wenn

$$\mathcal{M} \models \varphi[x_1/a_1, \dots, x_k/a_k, y/f^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_k)].$$

(b) $\Rightarrow$ (a): Zu allen $a_1, \dots, a_k \in M$ gilt nach der Annahme (b) und der obigen Bemerkung $\mathcal{M} \models \varphi[x_1/a_1, \dots, x_k/a_k, y/f^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_k)$, also insbesondere $\mathcal{M} \models \exists y \varphi\, [x_1/a_1, \dots, x_k/a_k]$.

(a) $\Rightarrow$ (b): Nach der Annahme (a) gibt es zu jedem $a_1, \dots, a_k \in M$ mindestens ein $b \in M$ mit $\mathcal{M} \models \varphi[x_1/a_1, \dots, x_k/a_k, y/b]$. Wähle ein solches b und definiere $f^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_k) := b$. Da man das für alle $(a_1, \dots, a_k) \in M^k$ machen kann, erhält man eine Funktion $f^{\mathcal{M}} : M^k \to M$, die die Behauptung erfüllt. □

Bemerkung 3.32 Das zu $\forall x_1 \dots \forall x_k \exists y \varphi$ eingeführte Funktionszeichen f bzw. seine Interpretation $f^{\mathcal{M}}$ heißt *Skolemfunktion*, nach dem norwegischen Logiker Thoralf Skolem. Es ist eine *Auswahlfunktion*, die zu jedem $a_1, \dots, a_k \in M$ ein „Beispiel“ b mit $\mathcal{M} \models \varphi[x_1/a_1, \dots, x_k/a_k, y/b]$ auswählt.

Satz 3.33 (Skolem'sche Normalform) Zu jeder L-Formel $\varphi(z_1, \dots, z_n)$ gibt es Erweiterung $L' = L \cup \{f_1, \dots, f_r\}$ um neue Funktionszeichen $f_1, \dots, f_r$ und eine quantorenfreie L'-Formel $\psi(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n)$, so daß φ genau dann erfüllbar ist, wenn $\forall y_1 \dots \forall y_m \psi\, (z_1, \dots, z_n)$ erfüllbar ist.

Beweis: Nach Satz 3.29 können wir annehmen, daß φ eine Formel in pränexer Form ist, $\varphi = Q_1 x_1 \dots Q_p x_p\, \varphi'$ mit quantorenfreiem $\varphi'(x_1, \dots, x_p, z_1, \dots, z_n)$. Sei r die Anzahl der $\exists$-Quantoren unter $Q_1, \dots, Q_p$. Falls $r = 0$ ist, hat φ schon die gewünschte Form. Ist $r > 0$, so ist

$$\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_k \exists x_{k+1} Q_{k+2} x_{k+2} \dots Q_p x_p\, \varphi'$$

für ein $k < p$. Wähle ein neues k-stelliges Funktionszeichen f_1. Nach dem vorigen Lemma ist φ genau dann erfüllbar (durch ein $\mathcal{M}$ und $c_1, \dots, c_n \in M$), wenn

$$\forall x_1 \dots \forall x_k (Q_{k+2} x_{k+2} \dots Q_p x_p\, \varphi')(x_{k+1}/f_1(x_1, \dots, x_k))$$

erfüllbar ist (durch ein $\mathcal{M}$ mit $c_1, \dots, c_n$ und *eine* passende Funktion $f_1^{\mathcal{M}}$). Diese Formel ist wieder in pränexer Normalform. Falls $r - 1 > 0$ ist, beseitigt man die übrigen $\exists$-Quantoren unter $Q_{k+2}, \dots, P_p$ ebenso durch neue, mindestens k-stellige Funktionszeichen $f_2, \dots, f_r$. □

Beispiel 3.34 (a) In $\mathcal{N} = (I\!N, +, \cdot, 0, 1)$ gilt $\forall x \exists y\, (y = x \cdot x)$. Die Skolemfunktion dazu ist $f(n) = n^2$.

(b) Das Aussonderungsaxiom der Mengenlehre (vgl. Beispiel 3.6) besagte, für jede Formel $\varphi(\vec{u}, x, z)$,

$$\forall \vec{u}\ \forall x\ \exists y\ \forall z(z \in y\ \leftrightarrow\ (z \in x \land \varphi(\vec{u}, x, z))).$$

In diesem Fall gibt es (nach dem Extensionalitätsaxiom) nur eine passende Menge y. Mit einer Skolemfunktion f hieße das

$$\forall \vec{u}\ \forall x\ \forall z(z \in f(\vec{u}, x)\ \leftrightarrow\ (z \in x \land \varphi(\vec{u}, x, z))).$$

Statt $f(\vec{u}, x)$ schreibt man üblicherweise $\{\, z \mid y \in x \land \varphi(\vec{u}, x, z)\,\}$.

Aus Satz 3.33 bekommt man zu φ eine Formel ohne $\exists$-Quantoren, die genau dann *erfüllbar* ist, wenn φ erfüllbar ist. Will man eine Formel, die genau dann *ällgemeingültig* ist, wenn φ allgemeingültig ist, so wendet man den Satz auf $\neg\varphi$ an:

Beispiel 3.35 Sei $\varphi = \exists x_1 \ldots \exists x_k \forall y \psi$. Dann ist

$$\neg\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_k \exists y \neg\psi$$

genau dann erfüllbar, wenn (mit neuem f)

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k (\neg\psi(y/f(x_1, \ldots, x_k)))$$

oder, umgeformt,

$$\neg\exists x_1 \ldots \exists x_k (\psi(y/f(x_1, \ldots, x_k)))$$

erfüllbar ist. Und das bedeutet:

$$\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{l}{\varphi \text{ ist allgemeingültig}} \\ \iff & \neg\varphi \text{ ist unerfüllbar} \\ \iff & \text{Es gibt kein } \mathcal{M}, f^{\mathcal{M}} : M^k \to M \text{ mit} \\ & (\mathcal{M}, f^{\mathcal{M}}) \models \neg\exists x_1 \ldots \exists x_k (\psi(y/f(x_1, \ldots, x_k))) \\ \iff & \exists x_1 \ldots \exists x_k (\psi(y/f(x_1, \ldots, x_k))) \text{ ist allgemeingültig.} \end{array}$$

Beachte, daß jetzt die $\forall$-Quantoren durch die Skolemfunktionen ersetzt werden!

Bemerkung 3.36 Man kann die Skolemfunktionen in gewissem Sinn gleich in den Aufbau der Terme einbauen, wenn man die Terme und Formeln simultan definiert. Dann fügt man zu den Termen eine der folgenden Bedingungen hinzu:

(a) Ist t ein Term, x eie Variable, und φ eine Formel, so ist $\iota x \varphi$ ein Term.

(b) Ist t ein Term, x eie Variable, und φ eine Formel, so ist $\epsilon x \varphi$ ein Term.

Man liest $\iota x \varphi$ als *dasjenige Objekt x mit der Eigenschaft φ* und $\epsilon x \varphi$ als *(irgend) ein Objekt x mit der Eigenschaft φ*. Dazu muß man Axiome fordern, z.B.

$$\forall \vec{y}(\exists^{=1} x \varphi \to \varphi(x/\iota x \varphi)) \quad \text{bzw.} \quad \forall \vec{y}(\varphi(x/\epsilon x \varphi)).$$