1.4 Normalformen

Definition 1.13 Ein *Literal* ist eine atomare Formel oder die Negation einer atomaren Formel.

Eine Formel ist in *Negationsnormalform*, wenn sie außer $\neg, \wedge, \vee$ keine Junktoren enthält und wenn in ihr $\neg$ nur vor atomaren Teilformeln auftritt.

Eine Formel ist in *konjunktiver* (bzw. disjunktiver) *Normalform*, wenn sie eine Konjunktion (bzw. Disjunktion) von Disjunktionen (bzw. Konjunktionen) von Literalen ist.

Lemma 1.14 Zu jeder Formel α gibt es eine Formel β, so daß

(a) $\alpha \equiv \beta$,

(b) jede Variable in β kommt auch in α vor,

(c) β ist in Negations- (bzw. konjunktiver bzw. disjunktiver) Normalform.

Beweis: Die Junktoren $\leftrightarrow$ und $\rightarrow$ können wir mit Hilfe von

$$\begin{aligned}(\alpha \leftrightarrow \beta) &\equiv ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)),\\ (\alpha \rightarrow \beta) &\equiv \neg\alpha \vee \beta\end{aligned}$$

beseitigen. Dann definieren wir die Normalformen durch Induktion über den Aufbau der verbleibenden[1] Formeln wie folgt:

$$\begin{aligned}NNF(A) &:= A,\\ NNF((\alpha_1 \wedge \alpha_2)) &:= (NNF(\alpha_1) \wedge NNF(\alpha_2)),\\ NNF((\alpha_1 \vee \alpha_2)) &:= (NNF(\alpha_1) \vee NNF(\alpha_2)),\\ NNF(\neg A) &:= \neg A,\\ NNF(\neg\neg\alpha) &:= NNF(\alpha)\\ NNF(\neg(\alpha_1 \wedge \alpha_2)) &:= (NNF(\neg\alpha_1) \vee NNF(\neg\alpha_2))\\ NNF(\neg(\alpha_1 \vee \alpha_2)) &:= (NNF(\neg\alpha_1) \wedge NNF(\neg\alpha_2))\end{aligned}$$

Man zeigt durch Induktion über den Formelaufbau, daß (a) $NNF(\alpha) \equiv \alpha$ gilt; die Bedingung (b) ist offensichtlich.

$DNF(\alpha)$ und $KNF(\alpha)$ definieren wir simultan durch Induktion über α:

$$\begin{aligned}DNF(A) &:= A\\ DNF(\neg\alpha) &:= NNF(\neg KNF(\alpha))\\ DNF((\alpha_1 \vee \alpha_2)) &:= (DNF(\alpha_1) \vee DNF(\alpha_2))\\ DNF((\alpha_1 \wedge \alpha_2)) &:= distrib(DNF(\alpha_1) \wedge DNF(\alpha_2))\end{aligned}$$

[1] Man ergänze die Definitionen um Fälle für die Aussagenkonstanten $\top$ und $\bot$.

$$\begin{aligned} KNF(A) &:= A \\ KNF(\neg\alpha) &:= NNF(\neg DNF(\alpha)) \\ KNF((\alpha_1 \wedge \alpha_2)) &:= (KNF(\alpha_1) \wedge KNF(\alpha_2)) \\ KNF((\alpha_1 \vee \alpha_2)) &:= distrib(KNF(\alpha_1) \vee KNF(\alpha_2)), \end{aligned}$$

wobei man bei $distrib(\delta)$ die Distributivregeln anwenden muß. Da alle Umformungen logische Äquivalenzen benutzen und keine neuen Variablen einführen, gilt die Behauptung. □

Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} DNF(\neg((A \wedge C) \vee \neg B)) &= NNF(\neg KNF((A \wedge C) \vee \neg B)) \\ &= NNF(\neg distrib(KNF(A \wedge C) \vee KNF(\neg B))) \\ &= NNF(\neg distrib((A \wedge C) \vee \neg B)) \\ &= NNF(\neg((A \vee \neg B) \wedge (C \vee \neg B))) \\ &= (NNF(\neg(A \vee \neg B)) \vee NNF(\neg(C \vee \neg B))) \\ &= ((NNF(\neg A) \wedge NNF(\neg\neg B)) \vee NNF(\neg(C \vee \neg B)))) \\ &= ((\neg A \wedge B) \vee NNF(\neg(C \vee \neg B)))) \\ &= ((\neg A \wedge B) \vee (\neg C \wedge B)) \end{aligned}$$