2.2 Modale Aussagenlogik

Syntax der modalen Aussagenlogik

Wir erweitern den Aufbau der aussagenlogischen Formeln, indem wir (einstellige) modale Junktoren, die *Modaloperatoren* $\Box, \Diamond$ zulassen:

Definition 2.6

$$
\begin{array}{rcll}
 & & & \text{intendierte Bedeutung} \\
\varphi, \psi & := & A & \\
 & | & \neg\varphi \mid \ldots \mid (\varphi \to \psi) & \text{(wie bisher)} \\
 & | & \Diamond\varphi & \textit{es ist möglich, daß } \varphi \\
 & | & \Box\varphi & \textit{es ist notwendig, daß } \varphi
\end{array}
$$

In der Umgangssprache werden die Modalitäten auch durch Modaladverbien wie *notwendigerweise* φ oder *möglicherweise* φ ausgedrückt, oder durch die Verwendung von Modalverben wie *müssen* oder *können*:

> *Muß der Rechner immer abstürzen, wenn ich arbeiten will?*
> *Wenn mein Rechner abgestürzt ist, kann ich nicht arbeiten.*

Es gibt in der Umgangssprache weitere Modaloperatoren, die wir hier nicht betrachten, z.B.

Es ist wahrscheinlich, daß φ.

Semantik der modalen Aussagenlogik

Die Semantik der Modaloperatoren ist erst durch Saul Kripke um 1960 formal geklärt worden, obwohl sich schon Aristoteles (340 v.Chr.) damit beschäftigt hat.

Intuitiv bedeutet *möglicherweise* φ, daß es „die (logische) Möglichkeit" gibt, daß φ gilt, d.h. daß es logisch nicht ausgeschlossen ist, daß φ gilt. Eine Interpretation wäre also:

$$\Diamond\varphi :\Longleftrightarrow \varphi \textit{ ist erfüllbar},$$

und entsprechend

$$\Box\varphi :\Longleftrightarrow \varphi \textit{ ist allgemeingültig}$$

für die (logische) Notwendigkeit: φ ist logisch notwendig, wenn φ *unter allen logisch möglichen Umständen* wahr ist.

Nun kann es ja sein, daß eine Aussage φ unter *gewissen* Umständen möglich und unter *anderen* Umständen *un*möglich ist. Die Bedeutung von *möglich* und *notwendig* ist daher, so Kripke, *relativ* zu den Umständen.

Um festzulegen, was unter gewissen Umständen (logisch) möglich ist, ordnet man diesen Umständen r daher eine Menge von alternativen Umständen zu, den von r aus "erreichbaren" Umständen:

Definition 2.7 Ein *Rahmen* $\mathcal{R} = (R, \prec)$ besteht aus einer Menge R von „Umständen“ (oder *möglichen Welten*) und einer zweistelligen *Erreichbarkeits*-Relation $\prec\ \subseteq R \times R$.

Eine *Belegung* über $\mathcal{R}$ ist eine Abbildung $g : R \times Var \to \{0, 1\}$. Der *Wert* $[\![\varphi]\!]^g_r$ *von* φ *unter den Umständen* $r \in R$ ist defininiert durch:

$$
\begin{array}{rcl}
[\![A]\!]^g_r & := & g(r, A) \\
[\![\neg\varphi]\!]^g_r & := & -[\![\varphi]\!]^g_r \\
& \vdots & \\
[\![\Diamond\varphi]\!]^g_r & := & \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![\varphi]\!]^g_s = 1 \text{ für mindestens ein } s \in R \text{ mit } r \prec s, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \\
[\![\Box\varphi]\!]^g_r & := & \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![\varphi]\!]^g_s = 1 \text{ für alle } s \in R \text{ mit } r \prec s, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}
\end{array}
$$

Eine Formel φ der modalen Aussagenlogik ist *gültig* (über $\mathcal{R}$), wenn $[\![\varphi]\!]^g_r = 1$ ist für jede Belegung g über $\mathcal{R}$ und jedes $r \in R$.

Ob eine Aussage wie „Was notwendig ist, ist auch möglich“, d.h.

$$\Box\varphi \to \Diamond\varphi$$

gültig ist, hängt von $\mathcal{R}$ ab.

Bemerkung 2.8 In der Aussagenlogik werden die „(logischen) Umstände“ durch Belegungen $r : Var \to \{0, 1\}$ dargestellt – was nicht durch die Wahrheitswerte der Aussagenvariablen bestimmt ist, ist logisch irrelevant. Man kann dann für R eine Menge von Belegungen im früheren Sinne nehmen und für die in der Definition benutzten g einfach $g(r, A) := r(A)$ benutzen.

Wie bei den Temporaloperatoren haben auch die Modaloperatoren den Vorteil, daß ihr *Wirkungsbereich* eindeutig bestimmt ist: sie beziehen sich auf ihre unmittelbare Teilformel. Zum Vergleich betrachte man die umgangssprachlichen Formulierungen:

(a) Es ist möglich, daß ich diese Frage nicht beantworten kann.

(b) Es ist nicht möglich, daß ich diese Frage beantworten kann.

(c) Ich kann diese Frage möglicherweise nicht beantworten.

(d) Ich kann diese Frage unmöglich beantworten.