1.3 Interpolation

Satz 1.10 (Interpolationssatz) Seien α und β Formeln mit $\alpha \models \beta$. Dann gibt es eine Formel γ, (eine *Interpolante* zu $\alpha \models \beta$), sodaß

(a) $\alpha \models \gamma$,

(b) $\gamma \models \beta$, und

(c) alle Aussagenvariablen aus γ kommen sowohl in α als auch in β vor.

Beispiel 1.11 (a) Zu $(A_1 \wedge \neg A_1) \models A_2$ ist $\bot$ eine Interpolante.

(b) Zu $(A_1 \to A_1) \models (A_2 \to A_2)$ ist $\neg\bot$ eine Interpolante.

(c) Zu $((A_1 \to A_1) \to A_2) \models (\neg A_2 \to A_3)$ ist A_2 eine Interpolante.

Beweis: Seien $\vec{A}$ die Aussagevariablen, die nur in α, $\vec{B}$ diejenigen, die nur in β, und $\vec{C}$ diejenigen, die sowohl in α also auch in β vorkommen.

Die gesuchte Formel γ muß nur mit Hilfe der $\vec{C}$ ausdrücken, daß β aus α folgt, d.h.

$$\text{Jede Belegung } g \text{ mit } [\![\alpha]\!]g = 1 \text{ erfüllt } [\![\beta]\!]g = 1.$$

Von diesen g spielen nach dem Koinzidenzlemma höchstens die Werte auf den Variablen aus $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ eine Rolle. Wir betrachten daher die Wahrheitstabelle

A_1	$\cdots$	A_k	B_1	$\cdots$	B_m	C_1	$\cdots$	C_n	α	β
0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0		
				$\ddots$						
$g(A_1)$	$\cdots$	$g(A_k)$	$g(B_1)$	$\cdots$	$g(B_m)$	$g(C_1)$	$\cdots$	$g(C_n)$	$[\![\alpha]\!]g$	$[\![\beta]\!]g$
				$\ddots$						
1	$\cdots$	1	1	$\cdots$	1	1	$\cdots$	1		

und interessieren uns für die Zeilen g mit $[\![\alpha]\!]g = 1$. Für jedes solche g bilden wir die Formel

$$\gamma_g := C_1' \wedge \cdots \wedge C_n' \qquad \text{mit } C_i' := \begin{cases} C_i, & \text{falls } g(C_i) = 1 \\ \neg C_i & \text{falls } g(C_i) = 0. \end{cases}$$

(Für $n = 0$ sei $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n := \top$ und $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n := \bot$.) Sei γ die Disjunktion über die γ_g der Zeilen g, in denen α wahr wird:

$$\gamma := \bigvee \{\gamma_g \mid g : \{A_1, \ldots, C_n\} \to \{0,1\},\ [\![\alpha]\!]g = 1\}.$$

Man sieht, daß γ die Bedingung (iii) erfüllt. Wir überlegen uns, daß auch (i) und (ii) gelten.

Zu (i), d.h. $\alpha \models \gamma$: Sei h eine Belegung mit $[\![\alpha]\!]h = 1$. Falls $h(C_i) = 1$ ist, so ist $[\![C_i']\!]h = [\![C_i]\!]h = h(C_i) = 1$, und falls $h(C_i) = 0$ ist, so ist ebenfalls $[\![C_i']\!]h = [\![\neg C_i]\!]h = -h(C_i) = 1$; daher ist $[\![\gamma_h]\!]h = 1$, also auch $[\![\gamma]\!]h = 1$.

Zu (ii), d.h. $\gamma \models \beta$: Sei h eine Belegung mit $[\![\gamma]\!]h = 1$. Da γ eine Disjunktion ist, muß mindestens ein Disjunktionsglied γ_g wahr werden, also $[\![\gamma_g]\!]h = 1$ sein für eine Belegung $g : \{A_1, \dots, C_n\} \to \{0,1\}$ mit $[\![\alpha]\!]g = 1$. Wegen $[\![\gamma_g]\!]h = 1$ ist $[\![C_i']\!]h = 1$ und daher $[\![C_i]\!]h = [\![C_i]\!]g$ für $i = 1, \dots, n$. Ist $\tilde{h}$ die Belegung, die auf $\vec{C}, \vec{B}$ mit h und auf $\vec{A}$ mit g übereinstimmt, so ist nach dem Koinzidenzlemma $[\![\alpha]\!]\tilde{h} = [\![\alpha]\!]g = 1$, also nach der Voraussetzung $\alpha \models \beta$ auch $[\![\beta]\!]\tilde{h} = 1$. Aber da h und $\tilde{h}$ auf allen Variablen von β übereinstimmen, ist nach dem Koinzidenzlemma dann $[\![\beta]\!]h = [\![\beta]\!]\tilde{h} = 1$. Das zeigt $\gamma \models \beta$. □

Beispiel 1.12 Wir betrachten das Beispiel (iii) oben, d.h.

$$((A_1 \to A_1) \to A_2) \models (\neg A_2 \to A_3).$$

Mit den Bezeichungen aus dem Beweis hat man $\alpha = ((A_1 \to A_1) \to A_2)$, $\beta = (\neg A_2 \to A_3)$, $\vec{A} = A_1$, $\vec{B} = A_3$ und $\vec{C} = A_2$. Die Wahrheitstabelle dafür ist

	A_1	A_2	A_3	$((A_1 \to A_1) \to A_2)$	$(\neg A_2 \to A_3)$
g_1	0	0	0	0	0
g_2	0	0	1	0	1
g_3	0	1	0	1	1
g_4	0	1	1	1	1
g_5	1	0	0	0	0
g_6	1	0	1	0	1
g_7	1	1	0	1	1
g_8	1	1	1	1	1

Damit wird

$$\gamma = \gamma_{g_3} \vee \gamma_{g_4} \vee \gamma_{g_7} \vee \gamma_{g_8},$$

wobei $\gamma_{g_i} = A_2$, da $g_i(A_2) = 1$ für $i = 3, 4, 7, 8$. Also ist $\gamma = A_2 \vee A_2 \vee A_2 \vee A_2$ eine Interpolante. Da A_2 zu γ logisch äquivalent ist und nicht mehr Variable enthält, ist auch die einfachere Formel A_2 eine Interpolante.