## 1.5 Hornformeln

Wir haben gesehen, daß eine Formel mit $n$ Aussagevariablen durch Aufstellen einer Wahrheitstafel mit $2^n$ Zeilen daraufhin überprüft werden kann, ob sie eine Tautologie ist, oder ob sie erfüllbar bzw. unerfüllbar ist: man sieht nach, ob sie unter allen Belegungen wahr wird, ob sie bei mindestens einer Belegung wahr wird, bzw. ob sie bei mindesten einer Belegung falsch wird.

Für Formeln einer bestimmten einfachen Form gibt es ein Verfahren, mit dem man die Erfüllbarkeit viel schneller feststellen kann.

**Definition 1.15** Eine *Hornformel* ist eine Formel $\varphi = \bigwedge_{I\in I} \bigvee_{j\in J_i} L_{i,j}$ in KNF, bei der in jedem Konjunktionsglied $\bigvee_{j\in J_i} L_{i,j}$ höchstens eines der Literale $L_{i,j}$ positiv (nicht negiert) ist.

Disjunktionen, in denen höchstens ein Disjunktionsglied nicht negiert sind, kann man durch äquivalente Formeln mit $\to$ wie folgt darstellen:

$$\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee B \equiv ((A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B) \tag{8}$$
$$B \equiv (\top \to B) \tag{9}$$
$$\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n \equiv ((A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to \bot) \tag{10}$$

**Satz 1.16** Es gibt ein Verfahren, mit dem man für jede Hornformel $\varphi$ mit $n$ Aussagevariablen in $O(n * |\varphi|)$ Schritten feststellen kann, ob $\varphi$ erfüllbar ist.

**Beweis:** Wir können annehmen, daß die Aussagekonstanten $\top$ und $\bot$ nicht in $\varphi$ vorkommen: wegen

$$\top \equiv \neg\bot, \tag{11}$$
$$\neg\top \equiv \bot \tag{12}$$

können wir zuerst $\top$ beseitigen und dann mit

$$\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee \bot \equiv \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n \tag{13}$$

alle positiven Vorkommen von $\bot$ beseitigen und mit

$$\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg\bot \vee \ldots \vee \neg A_n \equiv \neg\bot \tag{14}$$
$$\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg\bot \vee \ldots \vee \neg A_n \vee A \equiv \neg\bot \tag{15}$$

alle Konjunktionsglieder, in denen $\bot$ negativ vorkommt, durch $\neg\bot$ ersetzen; mit

$$\alpha \wedge \neg\bot \equiv \alpha \tag{16}$$

können wir diese $\neg\bot$ weglassen, falls es noch andere Konjunktionsglieder $\alpha$ gibt. Nach diesen Umwandlungen ist $\varphi$ entweder die Formel $\neg\bot$, also erfüllbar, oder eine Hornformel ohne $\top$ und $\bot$.

Also kommt o.B.d.A. $\top$ und $\bot$ nicht in $\varphi$ vor. Wir markieren Variablen $A$ von $\varphi$ wie folgt:

1. Markiere alle $A$, zu denen es ein Konjunktionsglied $A$ in $\varphi$ gibt.
2. Falls es ein Konjunktionsglied der Form $\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n$ gibt, bei dem $A_1, \ldots, A_n$ schon markiert sind, so halte an und antworte mit "$\varphi$ ist nicht erfüllbar".
3. Falls es ein Konjunktionsglied der Form $\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee A$ gibt, bei dem $A_1, \ldots, A_n$ schon markiert sind, aber $A$ noch nicht, so markiere $A$, und fahre bei 2. fort.
4. Halte an und antworte mit „$\varphi$ ist erfüllbar".

Da $\varphi$ nur endliche viele Variablen hat, können wir nur endlich oft 3. ausführen, also halten wir nach endlich vielen Schritten mit 2. oder 4. an.

**Beh. 1**: Es wurden genau die Variablen $A$ von $\varphi$ markiert, die bei jeder Belegung $g$ mit $[\![\varphi]\!]g = 1$ den Wert $g(A) = 1$ haben müssen.

Beweis: Falls es keine solche Belegung gibt, ist nichts zu zeigen. Im anderen Fall sei $g$ eine Belegung mit $[\![\varphi]\!]g = 1$; insbesondere ist $[\![\alpha]\!]g = 1$ für jedes Konjunktionsglied $\alpha$ von $\varphi$.

Falls $A$ durch 1. markiert wird, ist $A$ ein Konjunktionsglied von $\varphi$. Wegen $[\![A]\!] = 1$ muß $g(A) = 1$ sein.

Falls $A$ durch 3. markiert wird, gibt es ein Konjunktionsglied $\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee A$ von $\varphi$, von dem vorher schon $A_1, \ldots, A_n$ markiert wurden. Nach Induktion gilt für diese schon $g(A_1) = \ldots = g(A_n) = 1$. Wegen $[\![\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee A]\!]g = 1$ muß dann auch $[\![A]\!]g = 1 = g(A)$ gelten. Damit ist Beh. 1 gezeigt.

**Beh. 2**: Falls das Verfahren „$\varphi$ ist nicht erfüllbar" meldet, ist $\varphi$ nicht erfüllbar.

Beweis: In diesem Fall gibt es nach 2. ein Konjunktionsglied $\alpha = \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n$, dessen Variable alle markiert sind. Wäre $\varphi$ erfüllbar durch eine Belegung $g$, so wäre einerseits auch $[\![\alpha]\!]g = 1$, und andererseits nach Beh. 1 aber $g(A_1) = \ldots = g(A_n) = 1$, also $[\![\alpha]\!]g = 0$. Das kann nicht sein.

**Beh. 3**: Falls das Verfahren „$\varphi$ ist erfüllbar" meldet, ist $\varphi$ erfüllbar.

Beweis: Sei

$$g(A_i) := \begin{cases} 1, & \text{falls } A_i \text{ markiert wurde,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir zeigen $[\![\varphi]\!]g = 1$, indem wir für jedes Konjunktionsglied $\alpha$ von $\varphi$ nachweisen, daß $[\![\alpha]\!]g = 1$ ist.

Falls $\alpha = A$ für eine Aussagevariable $A$, so wurde $A$ in 1. markiert, also gilt $[\![\alpha]\!]g = [\![A]\!]g = g(A) = 1$. Falls $\alpha = \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n$ ist, so können wegen 2. nicht alle $A_i$ markiert sein, also ist $g(A_i) = 0$ für mindestens eines dieser $A_i$, und daher $[\![\alpha]\!]g = 1$. Falls $\alpha = \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee A$ ist, so sind nicht alle $A_i$ markiert oder es ist – wegen 3. – auch $A$ markiert. Daher ist für ein $i$ $g(A_i) = 0$ oder es ist $g(A) = 1$. In beiden Fällen wird $[\![\alpha]\!]g = 1$.

Da man höchstens jede der etwa $k$ vielen Variablen von $\varphi$ einmal markiert, muß man nur $k$ mal durch die Formel gehen, um die Teilformeln wie in 1.,2. und 3. zu behandeln. Daher ist der Gesamtaufwand im Wesentlichen $k * |\varphi|$ Schritte, wobei $|\varphi|$ die Länge von $\varphi$ ist. $\square$