1.7 Herbrand-Modelle

Aus der Skolem-Normalform kann man einige wichtige Folgerungen ziehen.[11]

In diesem Abschnitt sei L ein abzählbares Vokabular von Funktions- und Relationszeichen, das mindestens ein 0-stelliges Funktionszeichen c enthält.

Definition 1.37 Ein L-Term t bzw. eine L-Formel φ heißt *geschlossen*, wenn $frei(t) = \emptyset$ bzw. $frei(\varphi) = \emptyset$. Das *Herbrand-Universum* $H(L)$ ist die Menge aller geschlossenen L-Terme.

Eine *Herbrand-Struktur* ist eine Struktur $\mathcal{H} = (H, f^{\mathcal{H}}, P^{\mathcal{H}})_{f \in Fn(L), P \in Pr(L)}$ mit $H = H(L)$ und

$$f^{\mathcal{H}}(t_1, \dots, t_{n_f}) := f(t_1, \dots, t_{n_f}), \qquad P^{\mathcal{H}} \subseteq H^{n_P} \tag{31}$$

für jedes Funktionszeichen $f \in Fn(L)$ und jedes Prädikatszeichen $P \in Pr(L)$. Ein *Herbrand-Modell* einer L-Theorie T ist eine Herbrandstruktur $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{H} \models T$.

Satz 1.38 Sei $\overline{\varphi} = \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$ eine L-Aussage in Skolem'scher Normalform und ohne Gleichheitszeichen. Die Aussage $\overline{\varphi}$ ist genau dann erfüllbar, wenn φ ein Herbrand-Modell hat.

Beweis: Wir können annehmen, daß L aus c und den in φ vorkommenden Symbolen besteht.

$\Rightarrow$: Sei $\mathcal{A}$ ein Modell von φ. Falls die Konstante c in $\mathcal{A}$ nicht interpretiert ist (wenn c nicht in φ vorkommt), wähle ein Element $a \in A$ und setze $c^{\mathcal{A}} := a$. Dann gibt es zu jedem $t \in H(L)$ ein Element $[\![t]\!]_g^{\mathcal{A}} \in A$, das nicht von der Belegung g abhängt, da t keine freien Varablen hat; wir schreiben daher $[\![t]\!]^{\mathcal{A}}$.

Die Funktionszeichen sind auf $H(L)$ schon durch (31) festgelegt. Die Prädikatszeichen interpretieren wir wie folgt:

$$P^{\mathcal{H}} := \{ (t_1, \dots, t_{n_P}) \mid t_1, \dots, t_{n_P} \in H(L), \mathcal{A} \models P(t_1, \dots, t_{n_P}) \} \tag{32}$$

Durch Induktion über den Formelaufbau zeigen wir:

Beh.: Ist ψ eine L-Aussage in Skolem'scher Normalform, so gilt

$$\mathcal{A} \models \psi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} \models \psi.$$

Beweis: Für atomare Aussagen haben wir sogar

$$\mathcal{A} \models P(t_1, \dots, t_{n_P}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{H} \models P(t_1, \dots, t_{n_P}).$$

Das überträgt sich durch Induktion auf alle *quantorenfreien* Aussagen.

[11] Dieser Abschnitt folgt eng dem Buch von U.Schöning: Logik für Informatiker, BI 1989

Sei nun ψ eine Aussage der Form $\forall x\psi'$, mit $\mathcal{A} \models \psi$. Dann gilt $\mathcal{A} \models \psi'[x/a]$ für jedes $a \in A$, insbesondere also für jedes $a = [\![t]\!]^{\mathcal{A}}$ mit $t \in H(L)$. Wegen $[\![\psi']\!]^{\mathcal{A}}[x/[\![t]\!]^{\mathcal{A}}] = [\![\psi'[x/t]]\!]^{\mathcal{A}}$ haben wir nach der Induktionsvoraussetzung schon

$$\mathcal{A} \models \psi'[x/t] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} \models \psi'[x/t],$$

zusammen also $\mathcal{H} \models \psi'[x/t]$ und wegen $[\![\psi'[x/t]]\!]^{\mathcal{H}} = [\![\psi']\!]^{\mathcal{H}}[x/[\![t]\!]^{\mathcal{H}}]$ auch $\mathcal{H} \models \psi'[x/[\![t]\!]^{\mathcal{H}}]$. Da das für alle $t \in H(L)$ gilt, ist $\mathcal{H} \models \forall x\psi'$.

$\Leftarrow$: Sei $\mathcal{H}$ ein Herbrand-Modell von φ. Dann wird φ von $\mathcal{H}$ erfüllt. □

Bemerkung 1.39 Enthält die Sprache das Gleichheitszeichen, so haben wir bei den Gleichungen nur

$$\mathcal{A} \models s = t \quad \Leftarrow \quad \mathcal{H} \models s = t,$$

was für den obigen Beweis nicht ausreicht. Man kann aber auf $H(L)$ eine Äquivalenzrelation

$$\sim_{\mathcal{A}} := \{ (s,t) \mid s,t \in H(L), \mathcal{A} \models s = t \},$$

einführen und dann statt der Terme $t \in H(L)$ die Äquivalenzklassen

$$t/\sim_{\mathcal{A}} := \{ s \in H(L) \mid s \sim_{\mathcal{A}} t \}$$

als Objekte verwenden. Statt $\mathcal{H}$ benutzt man dann die Quotientenstruktur

$$\mathcal{H}/\sim_{\mathcal{A}} = (H(L)/\sim_{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{H}/\sim_{\mathcal{A}}}, P^{\mathcal{H}/\sim_{\mathcal{A}}})_{f \in Fn(L), P \in Pr(L)}, \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned} H(L)/\sim_{\mathcal{A}} &:= \{ t/\sim_{\mathcal{A}} \mid t \in H(L) \}, \\ f^{\mathcal{H}/\sim_{\mathcal{A}}}(t_1/\sim_{\mathcal{A}}, \ldots, t_{n_f}/\sim_{\mathcal{A}}) &:= f(t_1, \ldots, t_{n_f})/\sim_{\mathcal{A}}, \\ P^{\mathcal{H}/\sim_{\mathcal{A}}} &:= \{ (t_1/\sim_{\mathcal{A}}, \ldots, t_{n_f}/\sim_{\mathcal{A}}) \mid t_1, \ldots, t_{n_f} \in H(L), \mathcal{A} \models P(t_1, \ldots, t_{n_f}) \}. \end{aligned}$$

Man zeigt leicht, daß $\mathcal{H}/\sim_{\mathcal{A}}$ wohldefiniert ist (d.h. die Werte nicht von der Wahl der Repräsentanten t_i von $t_i/\sim_{\mathcal{A}}$ abhängen), und daß

$$\mathcal{A} \models s = t \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{H}/\sim_{\mathcal{A}} \models s = t.$$

Der Rest des Beweises geht dann wie oben, nur mit $\mathcal{H}/\sim_{\mathcal{A}}$ statt $\mathcal{H}$.

Man kann Satz 1.38 statt mit einer Aussage $\overline{\varphi}$ auch mit einer abzählbaren Menge solcher Aussagen (in Skolem-Normalform) führen.

Korollar 1.40 (Satz von Löwenheim und Skolem) Sei T eine (erststufige) Theorie in einer Sprache mit höchstens abzählbarem Vokabular. Dann hat T genau dann ein Modell $\mathcal{A}$, wenn T ein höchstens abzählbares Modell $\mathcal{H}$ hat.

Beweis: Da das Vokabular von T abzählbar ist, gibt es von jeder Länge n nur endlich viele verschiedene Aussagen, so daß auch T abzählbar ist. Betrachte die Skolem-Normalform von T,

$$T^{SNF} := \{ \varphi^{SNF} \mid \varphi \in T \}.$$

Beim Übergang zu T^{SNF} werden höchstens abzählbar viele Skolemfunktionen eingeführt, so daß auch die Sprache L von T^{SNF} abzählbar ist. Nach der erwähnten Verallgemeinerung von Satz 1.38 ist also T^{SNF} genau dann erfüllbar, wenn T erfüllbar ist. Ist $\mathcal{A} \models T^{SNF}$, so ist die oben konstruierte Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ (bzw. $\mathcal{H}/\sim_{\mathcal{A}}$) ein höchstens abzählbares Modell von T^{SNF}, da es nur abzählbar viele L-Terme gibt.

Aus jedem abzählbaren Modell von T^{SNF} erhalten wir ein abzählbares Modell von T (bzw. umgekehrt), indem wir die Interpretation der Skolemfunktionen weglassen (bzw. einführen). □

Die Erfüllbarkeit einer Theorie T in der Prädikatenlogik erster Stufe kann man nun auf die Erfüllbarkeit in der Aussagenlogik zurückführen. Wir machen es wieder nur für eine einzelne Aussage.

Definition 1.41 Sei $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ eine quantorenfreie L-Aussage. Die *Herbrand-Expansion von* φ ist

$$E(\varphi) := \{ \varphi[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n] \mid t_1, \ldots, t_n \in H(L) \}.$$

Satz 1.42 (Gödel,Herbrand,Skolem) Eine Aussage $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi$ in Skolem'scher Normalform ist genau dann erfüllbar, wenn die Menge $E(\varphi)$ (aussagenlogisch) erfüllbar ist.

Beweis: Es genügt, Herbrand-Modelle von $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi$ zu suchen. Für jede Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ gilt aber:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi \\
&\quad\iff \quad \text{für alle } t_1, \ldots, t_n \in H(L): \ \mathcal{H} \models \varphi[x_1/[\![t_1]\!]^{\mathcal{H}}, \ldots x_n/[\![t_n]\!]^{\mathcal{H}}] \\
&\quad\iff \quad \text{für alle } t_1, \ldots, t_n \in H(L): \ \mathcal{H} \models (\varphi[x_1/t_1, \ldots x_n/t_n]) \\
&\quad\iff \quad \mathcal{H} \models E(\varphi).
\end{aligned}$$

□

Die atomaren Teilaussagen von Aussagen in $E(\varphi)$ haben die Form $P(t_1, \ldots, t_{n_P})$ und stehen über die Terme in Beziehung zu einander, aber für die Erfüllbarkeit kann man jedes $P(t_1, \ldots, t_{n_P})$ als eine Aussagenvariable verstehen.

Die Erfüllbarkeit einer unendlichen Menge kann auf die Erfüllbarkeit ihrer endlichen Teilmengen zurückgeführt werden:

Satz 1.43 (Endlichkeitssatz der Aussagenlogik) Eine Menge T von aussagenlogischen Formeln ist genau dann erfüllbar, wenn alle ihre endlichen Teilmengen erfüllbar sind.

Beweis: $\Rightarrow$: Ist g eine Belegung, die T erfüllt, so erfüllt sie auch alle endlichen Teilmengen von T.

$\Leftarrow$: Sei $p_1, p_2, \ldots$ eine Aufzählung aller Aussagevariablen und

$$T_n := \{\, \varphi \in T \mid \mathit{Var}(\varphi) \subseteq \{p_1, \ldots, p_n\}\,\}.$$

Es gibt nur 2^n viele Belegungen der $p_1, \ldots, p_n$, also nur 2^{2^n} viele Wahrheitstafeln

$$\begin{array}{c|cl} p_1 \ldots p_n & \varphi & \\ \hline g_1 & v_1 & \in \{0,1\} \\ \vdots & \vdots & \\ g_{2^n} & v_{2^n} & \in \{0,1\} \end{array}$$

bzw. nicht-äquivalente Formeln $\varphi_1, \ldots, \varphi_{2^{2^n}} \in T_n$, obwohl es natürlich unendlich viele verschiedene Formeln in T_n gibt. Daher ist *jedes* $\varphi \in T_n$ zu einer Formel aus $E_n := \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{2^{2^n}}\} \subset T_n$ logisch äquivalent. Jede Belegung, die E_n erfüllt, erfüllt daher auch T_n. Nach Voraussetzung gibt es eine Belegung h_n, die E_n und daher $T_n \supset T_{n-1} \supset T_0$ erfüllt.

Definiere nun Belegungen g_n und schließlich eine Belegung g wie folgt:

$$\begin{aligned} g_0(p_j) &:= 0 \quad \text{für alle } j, \\ g_{n+1}(p_j) &:= \begin{cases} g_n(p_j), & \text{falls } j \leq n, \\ 1, & \text{falls } j = n \text{ und } h_i(p_n) = 1 \text{ für unendlich viele } i, \\ 0, & \text{sonst, für } j \geq n, \end{cases} \\ g(p_j) &:= g_{j+1}(p_j) \quad \text{für alle } j. \end{aligned}$$

Beachte, daß bei der Definition von g_{n+1} höchstens an dem Argument p_n ein Unterschied (von 0 zu 1) gegenüber g_n entsteht, und daß

$$g_n(p_j) \leq g_{n+1}(p_j) \leq 1$$

Beh.: Die Belegung g erfüllt T.

Bew.: Sei $\varphi \in T$, etwa $\varphi = \varphi(p_1, \ldots, p_m) \in T_m$. Da h_n die Menge $T_n \supset T_{n-1} \supset \ldots \supset T_0$ erfüllt, erfüllt jedes h_n mit $n \geq m$ die Formel φ. Nach Definition von g_n ist

$$g_n(p_j) = g(p_j) = h_n(p_j) \quad \text{für } 1 \leq j \leq m < n,$$

also erfüllt auch g die Formel φ. $\square$

Als Folgerung aus den letzten beiden Sätzen ergibt sich:

Satz 1.44 (Satz von Herbrand) Eine Aussage $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi$ in Skolem'scher Normalform ist genau dann unerfüllbar, wenn eine endliche Teilmenge von $E(\varphi)$ unerfüllbar ist.

Korollar 1.45 Die Menge der allgemeingültigen prädikatenlogischen Aussagen ist *semi-entscheidbar*, d.h. es gibt ein Verfahren, daß für jede allgemeingültige Aussage φ nach endlich vielen Schritten erkennt, daß φ allgemeingültig ist.

Beweis: Eine Aussage φ ist genau dann allgemeingültig, wenn $\neg\varphi$ unerfüllbar ist. Bilde also die Skolem'sche Normalform $(\neg\varphi)^{SNF} = \forall x_1 \ldots \forall x_n \psi$ zu $\neg\varphi$ und teste, ob sie unerfüllbar ist. Ist $\neg\varphi$ unerfüllbar, so ist auch $E(\psi)$ unerfüllbar, und nach Satz 1.44 muß es eine endliche Teilmenge $E \subset E(\psi)$ geben, die unerfüllbar ist. Für jedes E kann die (Un)Erfüllbarkeit getestet werden, indem man alle Belegungen der endlich vielen atomaren Aussagen aus E durchspielt. Man muß also nur systematisch alle endlichen Teilmengen $E \subset E(\psi)$ durchsuchen, bis man eine unerfüllbare gefunden hat. $\square$

Wenn man aber mit einer *nicht allgemeingültigen* Aussage φ beginnt, hat $E(\psi)$ keine unerfüllbare endliche Teilmenge, und die Suche danach kommt nicht zu einem Ende. Falls man also nicht weiß, ob φ allgemeingültig ist, kann man es mit dem Verfahren i.a. auch nicht entscheiden: es kann sein, daß das Verfahren nicht terminiert.

Man kann beweisen:

Satz 1.46 Die Menge der allgemeingültigen Aussagen der Prädikatenlogik ist *unentscheidbar*, d.h. es gibt kein Verfahren, mit denen in endlich vielen Schritten von jeder Aussage φ festgestellt werden kann, ob φ allgemeingültig ist.