1.6 Gentzen-Kalkül für die Prädikatenlogik

Definition 1.37 Der Gentzenkalkül für die Prädikatenlogik hat in den Sequenzen $\Gamma \triangleright \Delta$ endliche Mengen Γ und Δ von *prädikatenlogischen* Formeln.

Als Axiome nehmen wir für das Gleichheitszeichen folgende Sequenzen zu denen des Kalküls für die Aussagenlogik (vgl. Abschnitt 1.6) hinzu, für jede Formel φ, alle Terme s, t und Variable x:

$$\Gamma \triangleright \Delta_1, t = t, \Delta_2 \quad (=_1)$$

$$\Gamma_1, s = t, \varphi(x/s), \Gamma_2 \triangleright \Delta_1, \varphi(x/t), \Delta_2 \quad (=_2)$$
$$\Gamma_1, s = t, \varphi(x/t), \Gamma_2 \triangleright \Delta_1, \varphi(x/s), \Delta_2 \quad (=_3).$$

Die Regeln für die Junktoren sind dieselben wie in Abschnitt 1.6. Für die Quantoren kommen folgende Regeln hinzu:

$$\frac{\Gamma_1, \varphi(x/t), \Gamma_2 \triangleright \Delta}{\Gamma_1, \forall x\varphi, \Gamma_2 \triangleright \Delta} (\forall L) \qquad \frac{\Gamma \triangleright \Delta_1, \varphi, \Delta_2}{\Gamma \triangleright \Delta_1, \forall x\varphi, \Delta_2} (\forall R),$$

falls $x \notin \mathit{frei}(\Gamma, \Delta_1, \Delta_2)$

$$\frac{\Gamma_1, \varphi, \Gamma_2 \triangleright \Delta}{\Gamma_1, \exists x\varphi, \Gamma_2 \triangleright \Delta} (\exists L), \qquad \frac{\Gamma \triangleright \Delta_1, \varphi(x/t), \Delta_2}{\Gamma \triangleright \Delta_1, \exists x\varphi, \Delta_2} (\exists R)$$

falls $x \notin \mathit{frei}(\Gamma_1, \Gamma_2, \Delta)$

Außerdem nehmen wir noch die sogenannte *Schnittregel* hinzu:

$$\frac{\Gamma_1 \triangleright \Delta_1, \varphi \qquad\qquad \varphi, \Gamma_2 \triangleright \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \triangleright \Delta_1, \Delta_2} (Cut).$$

Beispiel 1.38 Daß alle (einstelligen) Funktionen total sind, kann man wie folgt beweisen. Im ersten Schritt wird das Axiom $(=_1)$ und im zweiten die Formel $\varphi(f(x)/z) := (z = f(x))(z/f(x))$ benutzt:

$$\cfrac{\cfrac{\triangleright f(x) = f(x)}{\triangleright \exists z(z = f(x))} (\exists R)}{\triangleright \forall x \exists z(z = f(x))} (\forall R\ x!)$$

Beispiel 1.39 Mit den Gleichheitsaxiomen können wir z.B. die Kongruenzeigenschaften beweisen, d.h.

$$\triangleright \forall x_1 \ldots \forall x_{n_P} \forall y_1 \ldots \forall y_{n_P} (\bigwedge_{i=1}^{n} (x_i = y_i) \to (P(x_1, \ldots, x_{n_P}) \to P(y_1, \ldots, y_{n_P})))$$

für Relationssymbole und

$$\triangleright \forall x_1 \ldots \forall x_{n_f} \forall y_1 \ldots \forall y_{n_f} (\bigwedge_{i=1}^{n} (x_i = y_i) \to f(x_1, \ldots, x_{n_f}) = f(y_1, \ldots, y_{n_f}))$$

für Funktionssymbole. Für $n = 1$ kann man den Beweis direkt führen:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x = y, P(x) \triangleright P(y)}\,(=_2)}{x = y \triangleright P(x) \to P(y)}}{\triangleright (x = y \to (P(x) \to P(y)))}}{\triangleright \forall x \forall y (x = y \to (P(x) \to P(y))}$$

Für $n > 1$ macht man den Beweis besser indirekt, indem man die Schnittregel benutzt, z.B. für $n = 2$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x' = y', P(x,x') \triangleright P(x,y')}{x' = y' \triangleright P(x,x') \to P(x,y')} \qquad P(x,x') \to P(x,y'), x = y \triangleright P(x,x') \to P(y,y')}{x = y, x' = y' \triangleright P(x,x') \to P(y,y')}\,(Cut)}{x = y \wedge x' = y' \triangleright P(x,x') \to P(y,y')}}{\triangleright x = y \wedge x' = y' \to (P(x,x') \to P(y,y'))}}{\triangleright \forall x \forall y \forall x' \forall y' (x = y \wedge x' = y' \to (P(x,x') \to P(y,y'))}$$

In dem Kalkül für die Aussagenlogik kam die Schnittregel nicht vor. Da der aussagenlogische Gentzenkalkül aber schon vollständig ist, und die Schnittregel korrekt ist, d.h. von gültigen Obersequenzen zu einer gültigen Untersequenz führt, braucht man sie zumindest für aussagenlogische Beweise nicht.

Man kann zeigen, daß man sie auch in der Prädikatenlogik nicht braucht (aber dazu ist die Symmetrie der Gleichheit als Axiom nöetig).

(Wird noch ergänzt)