3.4 Erfüllbarkeit und logische Folgerung

Definition 3.17 Eine L-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ heißt *erfüllbar*, wenn es eine L-Struktur $\mathcal{M}$ gibt, so daß

$$\mathcal{M} \models \exists x_1 \ldots \exists x_n \, \varphi.$$

Die Struktur $\mathcal{M}$ ist *ein Modell von* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, oder φ ist *gültig in* $\mathcal{M}$, wenn

$$\mathcal{M} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \, \varphi.$$

Eine L-Formel φ heißt *allgemeingültig*, wenn sie in jeder L-Struktur gültig ist. Zwei L-Formeln $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ und $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ heißen *logisch äquivalent*, wenn $\forall x_1 \ldots \forall x_n \, (\varphi \leftrightarrow \psi)$ allgemeingültig ist.

Logische Äquivalenz von φ und ψ bedeutet also wie in der Aussagenlogik, daß die Formeln *unter allen logisch möglichen Umständen* denselben Wahrheitswert haben: das heißt hier, daß bei allen Interpretationen $\mathcal{M}$ und allen Belegungen g die Werte $[\![\varphi]\!]_g^{\mathcal{M}}$ und $[\![\psi]\!]_g^{\mathcal{M}}$ gleich sind.

Beispiel 3.18 (a) Die Formel $\varphi(x) := \exists y(x \neq y)$ ist erfüllbar (in jeder Struktur mit mindestens zwei Elementen). Die Formel

$$\psi := \exists x \forall y(x \neq f(y)) \land \forall x \forall y(f(x) = f(y) \to x = y)$$

ist erfüllbar, z.B. in $\mathcal{N} = (I\!N, 0, f^{\mathcal{N}})$ mit $f(n) := n+1$. Aber jede Struktur, die ψ erfüllt, ist unendlich. Die Aussage $\psi \land \exists x \forall z(x = z)$ ist nicht erfüllbar.

(b) $\forall x(\varphi \land \psi)$ und $(\forall x \varphi \land \forall x \psi)$ sind logisch äquivalent.

Definition 3.19 Eine *Theorie* (in der Sprache L) ist eine Menge von L-Aussagen. Die Struktur $\mathcal{M}$ *ist ein Modell von* T, in Zeichen: $\mathcal{M} \models T$, wenn $\mathcal{M} \models \psi$ für jede Aussage $\psi \in T$.

Eine L-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *folgt* aus der L-Theorie T, in Zeichen: $T \models \varphi$, wenn jedes Modell von T auch ein Modell von φ ist. Zwei Formeln $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ und $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ sind *äquivalent über* T, wenn

$$T \models \forall x_1 \ldots x_n \, (\varphi \leftrightarrow \psi).$$

Die *Theorie der L-Struktur* $\mathcal{M}$ ist die Menge aller in $\mathcal{M}$ gültigen L-Aussagen,

$$Th(\mathcal{M}) := \{ \varphi \mid \mathit{frei}(\varphi) = \emptyset, \, \mathcal{M} \models \varphi \}.$$

Beispiel 3.20 Sein $\mathcal{N} = (I\!N, 0^{\mathcal{N}}, S^{\mathcal{N}}, <^{\mathcal{N}})$. In $Th(\mathcal{N})$ gelten z.B.:

(a) die Anordnung ist rekursiv aus dem Nachfolger definierbar:

$$\forall x \forall y \, (x < y \leftrightarrow (y = S(x) \lor \exists z(x < z \land z < y))).$$

(b) die Induktionsprinzipien: trifft eine (erststufige!) Eigenschaft auf 0 zu und enthält sie mit einer Zahl auch ihren Nachfolger, so enthält sie alle Zahlen:

$$\forall \vec{y} \, ([\varphi(x/0) \land \forall x(\varphi \to \varphi(S(x)/x))] \to \forall x \, \varphi).$$