# Lösungen zum Aufgabenblatt 8
# Formale Sprachen und Automaten

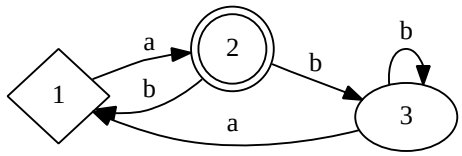
Universität München, CIS, WS 2016/17

Hans Leiß

Ausgabe: Fr 12.12.2016 Abgabe: Do 22.12.2016

## Aufgabe 8.1

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $\mathcal{A}$ der im folgenden dargestellte Automat:

$\mathcal{A} =$ 


Eine Relation $R \subseteq Q \times Q$ ist (links-)*total*, wenn es zu jedem $p \in Q$ ein $q \in Q$ mit $(p, q) \in R$ gibt, und $R$ heißt *funktional*, wenn es zu jedem $p \in Q$ *höchstens ein* $q \in Q$ mit $(p, q) \in R$ gibt.

(a) Warum ist der Automat $\mathcal{A}$ nicht determinstisch?

(b) Sind die Relationen $\xrightarrow{a}$ und $\xrightarrow{b}$ von $\mathcal{A}$ auf $Q = \{1, 2, 3\}$ total?

(c) Sind die Relationen $\xrightarrow{a}$ und $\xrightarrow{b}$ von $\mathcal{A}$ auf $Q = \{1, 2, 3\}$ funktional?

(d) Gib für das Wort *aba* eine akzeptierende und eine nicht akzeptierende Berechnung (Konfigurationsfolge) an!

(e) Erweitere den Automaten um *einen* Zustand 4 (eine „Senke“) und einige Kanten zu einem vollständigen Automaten $\mathcal{A}'$ (d.h. mit totalen Relationen $\xrightarrow{a}$ und $\xrightarrow{b}$) mit $L(\mathcal{A}') = L(\mathcal{A})$.

(f) Berechne einen (vollständigen) deterministischen Automaten $\mathcal{A}^{det}$ mit $L(\mathcal{A}^{det}) = L(A)$ (nach der „Potenzmengenkonstruktion“). (3 Punkte)

(g) Gib zwei verschiedene Berechnungen für *ababa* mit dem nichtdeterministischen Automaten $\mathcal{A}$ an und vergleiche sie mit der einzigen Berechung mit dem deterministischen Automaten $\mathcal{A}^{det}$. (2 Punkte)

**Lösung von Aufgabe 8.1**

(a) Weil vom Zustand 2 zwei $b$-Kanten zu verschiedenen Zuständen (1 und 3) führen.

(b) $\xrightarrow{a}$ ist nicht total, weil vom Zustand 2 keine $a$-Kante ausgeht, und $\xrightarrow{b}$ ist nicht total, weil vom Zustand 1 keine $b$-Kante ausgeht.

(c) Die Relation $\xrightarrow{a}$ ist funktional und entspricht der partiellen Funktion

$$f_a(i) := \begin{cases} 2, & \text{falls } i = 1, \\ 1, & \text{falls } i = 3, \\ \textit{undefiniert}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Relation $\xrightarrow{b}$ ist nicht funktional, da von Zustand 2 ja $b$-Kanten zu *verschiedenen* Zuständen ausgehen.

(d) Eine akzeptierende Berechung zu $aba$ ist

$$(1, aba) \vdash (2, ba) \vdash (1, a) \vdash (2, \epsilon),$$

eine nicht akzeptierende Berechnung zu $aba$ ist

$$(1, aba) \vdash (2, ba) \vdash (3, a) \vdash (1, \epsilon).$$

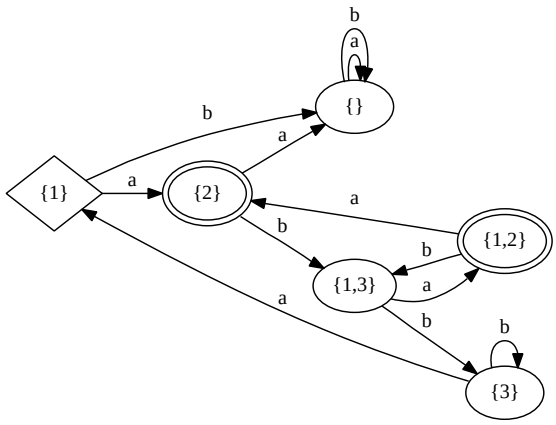
(e) Ergänze einen neuen Zustand 4 und die Kanten

$$2 \xrightarrow{a} 4, \quad 4 \xrightarrow{a} 4, \quad 1 \xrightarrow{b} 4, \quad 4 \xrightarrow{b} 4.$$

Dann sind die neuen Relationen $\xrightarrow{a}$ und $\xrightarrow{b}$ total, und es wird kein weiteres Wort akzeptiert, da jeder vorher nicht vorhandene Weg zum Zustand 4 führt und im Nicht-Endzustand 4 endet.

(f) Der durch die Potenzmengenkonstruktion aus $\mathcal{A} = (Q, \xrightarrow{a}, \xrightarrow{b}, I, F)$ berechnete (vollständige) deterministische Automat ist

$\mathcal{A}^{det} =$



Man braucht als Zustände von $\mathcal{A}^{det}$ nur die $P \in \mathcal{P}(Q)$, die man aus der Menge $I = \{1\}$ der Anfangszustände von $\mathcal{A}$ bekommt, wenn man ihre Nachfolgerzustandsmengen

$$\delta'(I, a) = \{\, q \in Q \mid \exists p \in I \, p \xrightarrow{a} q \,\} = \{2\}$$

und

$$\delta'(I, b) = \{\, q \in Q \mid \exists p \in I \, p \xrightarrow{b} q \,\} = \{\}$$

und dann deren Nachfolger berechnet,

$$\delta'(\{2\}, a) = \{\}, \quad \delta'(\{2\}, b) = \{1, 3\}$$

usw., bis keine neuen Teilmengen von $Q$ mehr auftreten.

(g) Mit $\mathcal{A}$ gibt es zu $ababa$ eine akzeptierende Berechnung,

$$(1, ababa) \vdash (2, baba) \vdash (1, aba) \vdash (2, ba) \vdash (1, a) \vdash (2, \epsilon),$$

und eine nicht-akzeptierende:

$$(1, ababa) \vdash (2, baba) \vdash (1, aba) \vdash (2, ba) \vdash (3, a) \vdash (1, \epsilon).$$

Mit $\mathcal{A}^{det}$ gibt es nur eine Berechnung, und diese ist akzeptierend:

$$(\{1\}, ababa) \vdash (\{2\}, baba) \vdash (\{1, 3\}, aba) \vdash (\{1, 2\}, ba) \vdash (\{1, 3\}, a) \vdash (\{1, 2\}, \epsilon).$$

Wie man sieht, enthalten die durchlaufenen Zustände von $\mathcal{A}^{det}$ mindestens die Zustände von $\mathcal{A}$, die $\mathcal{A}$ bei der akzeptierenden Berechnung durchläuft.

## Aufgabe 8.2

(a) Zeige für $\Sigma = \{a, b\}$ und $L = \{\, (ab)^{2n} a (ba)^n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$, daß $L$ von keinem endlichen Automaten über $\Sigma$ akzeptiert wird, also nicht regulär ist. (4 Punkte)

Hinweis: benutze das Wiederholungslemma.

(b) Ist $h : \Sigma^* \to \Delta^*$ ein Monoidhomomorphismus, so ist für reguläres $L \subseteq \Sigma^*$ auch $h[L] = \{\, h(w) \mid w \in L \,\} \subseteq \Delta^*$ regulär. Folgere daraus, daß für $a, b \notin \Sigma$ die Sprache

$$\bigcup \{\, (\Sigma^* a)^n (\Sigma^* b)^n \Sigma^* \mid n \in \mathbb{N} \,\}$$

nicht regulär ist. (1 Punkt)

### Lösung von Aufgabe 8.2

(a) Die Idee ist: wenn man von den $2n$ vielen $(ab)$ am Anfang $2k$ viele wegläßt, bleiben $2n - 2k =: 2m$ viele $(ab)$ am Anfang der Wörter, dann kommt $a$ und dann die $(ba)^n = (ba)^{k+m}$, also:

$$(ab)^{2k} \backslash L = \{\, (ab)^{2m} a (ba)^{k+m} \mid m \in \mathbb{N} \,\}$$

Und da diese Sprachen für verschiedene $k \in \mathbb{N}$ verschieden sind, gibt es unendlich viele $w\backslash L$. Der Satz aus der Vorlesung sagte, daß eine Sprache $L$ genau dann von einem endlichen Automaten akzeptiert wird, wenn

$$\{\, w\backslash L \mid w \in \Sigma^* \,\}$$

endlich ist. Also wird die Sprache der Aufgabe nicht von einem endlichen Automaten erkannt.

(b) Definiere $h : (\Sigma \cup \{a, b\})^* \to \{a, b\}^*$ durch $h(c) = \epsilon$ für $c \in \Sigma$, $h(a) = a$, $h(b) = b$ für die Buchstaben; daraus wird mit $h(u \cdot v) = h(u) \cdot h(v)$ für Wörter $u, v \notin \Sigma \cup \{a, b\}$ ein Homomorphismus. Wäre

$$L = \bigcup\{\, (\Sigma^* a)^n (\Sigma^* b)^n \Sigma^* \mid n \in \mathbb{N} \,\}$$

regulär, so auch das Bild unter $h$,

$$h[L] = \bigcup\{\, h[(\Sigma^* a)^n (\Sigma^* b)^n \Sigma^*] \mid n \in \mathbb{N} \,\} = \bigcup\{\, \{a\}^n \{b\}^n \mid n \in \mathbb{N} \,\} = \{\, a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \,\},$$

aber wie (mit dem Wiederholungslemma) gezeigt wurde, ist diese Sprache nicht regulär. Also kann mit dem Satz auch $L$ nicht regulär sein.