

1 Mathematische Grundbegriffe

1.1 Relationen und Funktionen

Seien A_1, \dots, A_n Mengen. Ein n -TUPEL über A_1, \dots, A_n ist eine Folge (a_1, \dots, a_n) von Objekten $a_i \in A_i$, für $i = 1, \dots, n$. Zwei n -Tupel sind GLEICH, falls sie dieselben Elemente in derselben Reihenfolge enthalten

$$(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) \iff a_i = b_i \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Das CARTESISCHE PRODUKT der Mengen A_1, \dots, A_n ist

$$A_1 \times \dots \times A_n := \{ (a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ für } i = 1, \dots, n \}.$$

Eine n -stellige RELATION auf A_1, \dots, A_n ist eine Menge $R \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$ von n -Tupeln. Eine PARTIELLE FUNKTION VON $A_1 \times \dots \times A_n$ NACH B ist eine Relation $R \subseteq A_1 \times \dots \times A_n \times B$ mit

$$(a_1, \dots, a_n, b) \in R, (a_1, \dots, a_n, c) \in R \implies b = c.$$

Die Funktion R heißt TOTAL, falls es zu jedem (a_1, \dots, a_n) ein $b \in B$ mit $(a_1, \dots, a_n, b) \in R$ gibt. Für Funktionen $f \subseteq A_1 \times \dots \times A_n \times B$ schreiben wir ab jetzt

$$f : A_1 \times \dots \times A_n \longrightarrow B,$$

und $f(a_1, \dots, a_n) = b$ statt $(a_1, \dots, a_n, b) \in f$. Das BILD von $R \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$ unter $f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A$ ist die Menge

$$\{ f(a_1, \dots, a_n) \mid (a_1, \dots, a_n) \in R \} =: f[R].$$

Eine n -STELLIGE RELATION AUF A ist eine Relation $R \subseteq A^n := A \times \dots \times A$ mit n gleichen Faktoren A .

Eine Teilmenge $B \subseteq A$ ist ABGESCHLOSSEN unter der Relation $R \subseteq A^n \times A$, falls

$$(b_1, \dots, b_n, a) \in R, b_i \in B \implies a \in B.$$

Beispiel 1.1 Sei $A = A_1 \times \dots \times A_n$, und $2^A := \{ S \mid S \subseteq A \}$ die POTENZMENGE VON A . Sie ist abgeschlossen unter den boolschen Operationen $\cap, \cup, -$:

$$\begin{aligned} R_1 \cap R_2 &:= \{ (a_1, \dots, a_n) \mid (a_1, \dots, a_n) \in R_1 \text{ und } (a_1, \dots, a_n) \in R_2 \}, \\ R_1 \cup R_2 &:= \{ (a_1, \dots, a_n) \mid (a_1, \dots, a_n) \in R_1 \text{ oder } (a_1, \dots, a_n) \in R_2 \}, \\ \overline{R} &:= \{ (a_1, \dots, a_n) \mid (a_1, \dots, a_n) \in A, (a_1, \dots, a_n) \notin R \}. \end{aligned}$$

Sei $R \in 2^{A^n}$ eine n -stellige Relation und $\mathcal{R} = \{ S \subseteq A^n \mid S \subseteq R \}$ die Gesamtheit aller Teilrelationen von R . Dann ist \mathcal{R} abgeschlossen unter der Relation \subseteq zwischen Relationen und unter den Operationen \cap und \cup , aber nicht unter der Komplementbildung.

Sei $f : A^n \rightarrow A$ und $B \subseteq A$. Der ABSCHLUSS VON B UNTER f ist

$$f^\infty(B) := \bigcap \{ S \mid B \subseteq S \subseteq A, \forall a_1, \dots, a_n \in S \ f(a_1, \dots, a_n) \in S \},$$

d.h. die kleinste Teilmenge von A , die B umfaßt und unter f abgeschlossen ist.

Lemma 1.2 Sei $f : A^n \rightarrow A$ und $B \subseteq A$. Der Abschluß von B unter f ist

$$\bigcup \{ B_i \mid i \in \mathbb{N} \}, \quad \text{mit } B_0 := B, \ B_{i+1} := B_i \cup \{ f(a_1, \dots, a_n) \mid (a_1, \dots, a_n) \in B_i^n \}.$$

Beweis: $f^\infty(B) \subseteq \bigcup \{ B_i \mid i \in \mathbb{N} \}$: Es genügt zu zeigen, daß $\bigcup \{ B_i \mid i \in \mathbb{N} \}$ unter f abgeschlossen ist. Seien $a_1, \dots, a_n \in \bigcup \{ B_i \mid i \in \mathbb{N} \}$. Es gibt ein kleinstes $j \in \mathbb{N}$ mit $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq B_j$. Dann ist $f(a_1, \dots, a_n) \in B_{j+1} \subseteq \bigcup \{ B_i \mid i \in \mathbb{N} \}$.

$\bigcup \{ B_i \mid i \in \mathbb{N} \} \subseteq f^\infty(B)$: Offenbar ist $B_0 = B \subseteq f^\infty(B)$. Ist für ein $i \in \mathbb{N}$ schon $B_i \subseteq f^\infty(B)$, so ist auch $B_{i+1} \subseteq f^\infty(B)$, da diese Menge unter f abgeschlossen ist. \square

Der folgende Satz besagt, daß es für $|B| > 1$ "mehr" Funktionen $f : A \rightarrow B$ als Elemente von A gibt, auch wenn A unendlich ist:

Satz 1.3 Sei $\mathcal{F} := \{ f_a \mid a \in A \}$ eine Familie von höchstens $|A| \neq 0$ vielen (totalen) Funktionen $f_a : A \rightarrow \{0, 1\}$. Es gibt Funktionen $f : A \rightarrow \{0, 1\}$, die in \mathcal{F} nicht vorkommen.

Beweis: (Diagonalverfahren) Sei f die durch

$$f(a) := 1 - f_a(a)$$

definierte Funktion. Dann ist $f(a) \neq f_a(a)$, also $f \neq f_a$, für jedes $a \in A$. \square

1.2 Die Algebra der zweistelligen Relationen

Definiere zu zweistelligen Relationen R, R_1, R_2 auf einer Menge A : Die INVERSE von R :

$$R^{-1} := \{ (b, a) \mid (a, b) \in R \},$$

das RelationenPRODUKT von R_1 und R_2

$$R_1 \circ R_2 := \{ (a, c) \mid \exists b \in A ((a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2) \},$$

die IDENTITÄT auf A :

$$1_A = Id_A := \{ (a, a) \mid a \in A \},$$

die RelationensUMME von R_1 und R_2 :

$$R_1 \cup R_2 := \{ (a, b) \mid (a, b) \in R_1 \text{ oder } (a, b) \in R_2, \}$$

und die LEERE Relation auf A :

$$0_A := \emptyset,$$

d.h. die Relation, die kein Tupel enthält.

Beachte, daß damit gilt:

$$\begin{array}{ll} R \cup (R_1 \cup R_2) &= (R \cup R_1) \cup R_2, & R \cup 0 &= R = 0 \cup R, \\ R_1 \cup R_2 &= R_2 \cup R_1, \\ R \cup R &= R, \\ R \circ (R_1 \circ R_2) &= (R \circ R_1) \circ R_2, & R \circ 1 &= R = 1 \circ R, \\ (R_1 \cup R_2)^{-1} &= R_1^{-1} \cup R_2^{-1}, & R \circ 0 &= 0 = 0 \circ R, \\ (R_1 \circ R_2)^{-1} &= R_2^{-1} \circ R_1^{-1}, & 1^{-1} &= 1, \\ (R^{-1})^{-1} &= R, & 0^{-1} &= 0. \end{array}$$

Aber i.a. gilt *nicht* etwa $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$ oder $R \circ R^{-1} = 1_A$.

Beispiel 1.4 Sei $R = \{(a, b), (c, b)\}$, mit paarweise verschiedenen Punkten a, b und c . Dann ist $(a, c) \in R \circ R^{-1}$, da ja $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R^{-1}$. Wegen $a \neq c$ ist aber $(a, c) \notin 1_A$, also $R \circ R^{-1} \not\subseteq 1_A$.

Eine Relation R heißt TRANSITIV, falls $R \circ R \subseteq R$, d.h. für alle a, b, c gilt: $(a, b) \in R, (b, c) \in R \implies (a, c) \in R$. R heißt REFLEXIV, falls $Id \subseteq R$, d.h. $(a, a) \in R$ für alle $a \in A$, und SYMMETRISCH, falls $R^{-1} \subseteq R$, d.h. $(a, b) \in R \implies (b, a) \in R$.

Lemma 1.5 Ist \mathcal{R} eine nicht-leere Menge von reflexiven (transitiven, symmetrischen) Relationen auf A , so ist auch $\bigcap \mathcal{R} := \{ (a, b) \mid (a, b) \in R \text{ für alle } R \in \mathcal{R} \}$ eine reflexive (bzw. transitive, symmetrische) Relation.

Beweis: Da $\mathcal{R} \neq \emptyset$ und $1_A \subseteq R$ für alle $R \in \mathcal{R}$, gilt auch $1_A \subseteq \bigcap \mathcal{R}$. Analog: Ist $R \circ R \subseteq R$ für alle $R \in \mathcal{R}$, so ist

$$\bigcap \mathcal{R} \circ \bigcap \mathcal{R} \subseteq R \circ R \subseteq R$$

für alle $R \in \mathcal{R}$, also auch $\bigcap \mathcal{R} \circ \bigcap \mathcal{R} \subseteq \bigcap \mathcal{R}$. Entsprechend für die Symmetrie. \square

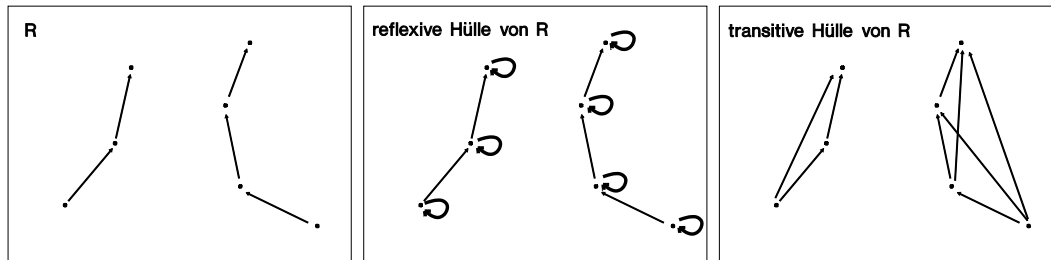
Daher definieren wir für $R \subseteq A \times A$ den TRANSITIVEN ABSCHLUSS VON R ,

$$R^+ := \bigcap \{ S \mid R \subseteq S \subseteq A \times A, \quad S \text{ ist transitiv} \},$$

und den REFLEXIVEN UND TRANSITIVEN ABSCHLUSS VON R ,

$$R^* := \bigcap \{ S \mid R \subseteq S \subseteq A \times A, \quad S \text{ ist transitiv und reflexiv} \}.$$

R^+ (bzw. R^*) ist die \subseteq -kleinste transitive (bzw. kleinste transitive und reflexive) Relation S auf A ist, die R umfaßt.



Ähnlich wie in Lemma 1.2 zeigt man:

$$R^* = \bigcup \{ R^n \mid n \in \mathbb{N} \}, \quad \text{mit } R^0 := 1_M, \quad R^{n+1} := R^n \circ R.$$

Eine ALGEBRA $\mathcal{A} = (A, f_1, \dots, f_k)$ besteht aus einer Trägermenge A und einer Reihe f_1, \dots, f_k von Operationen auf A , d.h. Abbildungen $f_i : A^{n_i} \rightarrow A$.

Die Algebra $\mathcal{R}_A := (2^{A \times A}, \cup, \emptyset, \circ, 1_A, ^{-1}, *)$ heißt DIE ALGEBRA DER 2-STELLIGEN RELATIONEN AUF A .

1.3 Äquivalenzrelationen

Eine zweistellige Relation R auf einer Menge A heißt eine ÄQUIVALENZRELATION auf A , falls R reflexiv, transitiv und symmetrisch ist. Ist R eine Äquivalenzrelation auf A , so sei

$$[a]_R := \{ b \mid b \in A, (a, b) \in R \}$$

die ÄQUIVALENZKLASSE VON a BEZÜGLICH R . Die Gesamtheit aller Äquivalenzklassen von R wird mit A/R bezeichnet.

Eine Mengenfamilie $\mathcal{B} \subseteq 2^A$ ist eine ZERLEGUNG von A in disjunkte Teilmengen, wenn es für jedes $a \in A$ genau ein $B \in \mathcal{B}$ mit $a \in B$ gibt.

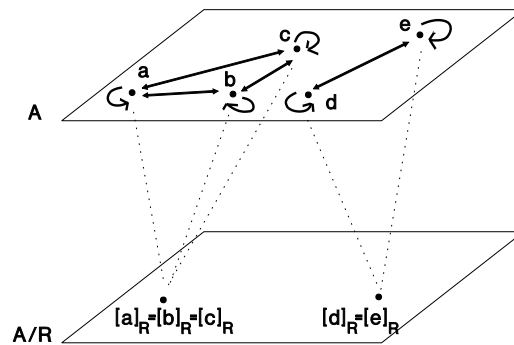
Satz 1.6 (i) Ist R eine Äquivalenzrelation auf A , so ist $\{ [a]_R \mid a \in A \}$ eine Zerlegung von A in disjunkte Teilmengen.

(ii) Ist $\mathcal{B} \subseteq 2^A$ eine Zerlegung von A in disjunkte Teilmengen, so wird durch

$$(a, b) \in R \iff \{a, b\} \subseteq B \text{ für ein } B \in \mathcal{B}$$

eine Äquivalenzrelation auf A definiert.

Zur Veranschaulichung betrachte man folgendes Bild:



Beweis:

(i) Beachte, daß $a \in [a]_R$. Also bilden die $[a]_R$ eine Zerlegung von A . Es bleibt zu zeigen, daß verschiedene Teilmengen $[a]_R$ zueinander disjunkt sind.

Seien $a, b \in A$ mit $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$, etwa $c \in [a]_R \cap [b]_R$. Für jedes $x \in A$ gilt:

$$\begin{aligned} x \in [a]_R &\implies (a, x) \in R, && \text{nach der Definition von } [a]_R, \\ &\implies (x, a) \in R, && \text{wegen der Symmetrie von } R, \\ &\implies (x, c) \in R, && \text{mit } (a, c) \in R \text{ und der Transitivität von } R, \\ &\implies (c, x) \in R, && \text{wegen der Symmetrie von } R, \\ &\implies (b, x) \in R, && \text{mit } (b, c) \in R \text{ und der Transitivität von } R, \\ &\implies x \in [b]_R. \end{aligned}$$

Daher ist $[a]_R \subseteq [b]_R$, und analog gilt auch $[a]_R \supseteq [b]_R$. Also sind zwei sich überlappende Mengen $[a]_R$ und $[b]_R$ schon gleich, d.h. die Zerlegung ist disjunkt.

(ii) Das bleibt dem Leser zur Übung überlassen.

□

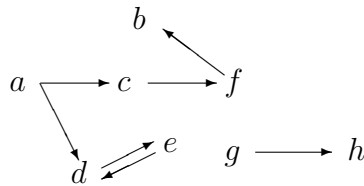
Beispiel 1.7 Sei $f : A \rightarrow B$ eine totale Funktion. Dann definiert $(a, b) \in R \iff f(a) = f(b)$ eine Äquivalenzrelation auf A .

1.4 Partielle Ordnungen, Graphen, Bäume

Ein GRAPH $\mathcal{G} = (A, R)$ ist eine Menge A mit einer 2-stelligen Relation R auf A . Falls R symmetrisch ist, heißt G UNGERICHTET. Ein WEG VON a NACH b in \mathcal{G} ist eine Folge $a = a_1, \dots, a_n = b$ von Elementen aus A mit $(a_i, a_{i+1}) \in R$ für $i = 1, \dots, n - 1$.

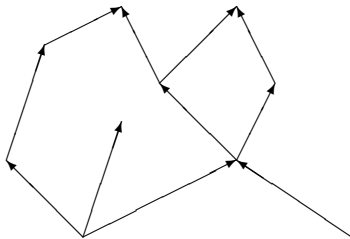
Man schreibt meist $a \rightarrow b$ statt $(a, b) \in R$.

Beispiel 1.8 Ein Graph (A, \rightarrow) mit einem Weg von a nach b :

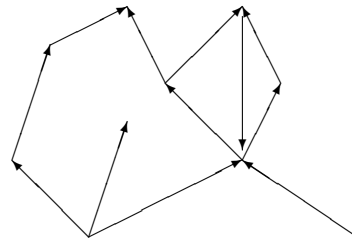


Eine PARTIELLE ORDNUNG (A, R) ist eine Menge A mit einer reflexiven, transitiven und antisymmetrischen Relation R auf A . Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt ANTISYMMETRISCH, falls $R \cap R^{-1} \subseteq Id_A$.

Beispiel 1.9 Zwei Graphen (A, \rightarrow) , für die \rightarrow^* antisymmetrisch bzw. nicht antisymmetrisch ist:



\rightarrow^* ist eine partielle Ordnung



\rightarrow^* ist keine partielle Ordnung

Eine partielle Ordnung schreibt man meist als (A, \leq) . Man sagt a ist ECHT KLEINER ALS b und schreibt $a < b$, falls $a \leq b$ und $a \neq b$.

Eine partielle Ordnung \leq auf A ist TOTAL, falls $a \leq b$ oder $b \leq a$ für alle $a, b \in A$ gilt, d.h. wenn je zwei Elemente vergleichbar sind.

Eine partielle Ordnung (A, \leq) ist FUNDIERT, falls es keine unendliche echt absteigende Folge

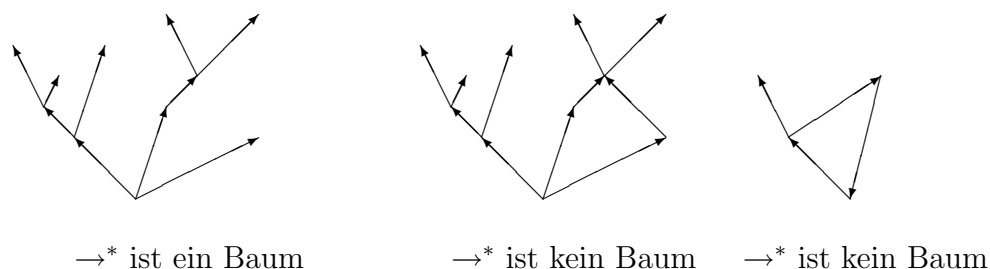
$$\dots < a_{n+1} < a_n < \dots < a_1 < a_0 \quad n \in \mathbb{N}, a_n \in A,$$

gibt.

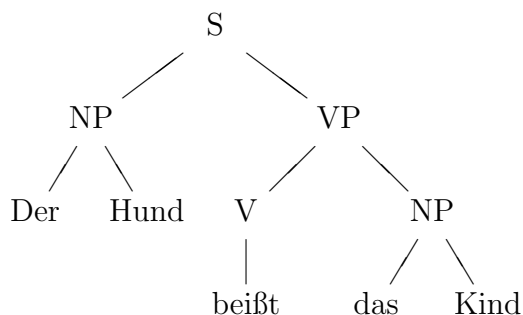
Ein (nicht angeordneter) BAUM ist eine partielle Ordnung (B, \leq) mit den Eigenschaften

- (i) (B, \leq) ist fundiert.
- (ii) Für jedes $b \in B$ ist $(\{a \in B \mid a \leq b\}, \leq)$ eine totale Ordnung.
- (iii) Es gibt ein kleinstes Element $0 \in B$, die WURZEL, mit $0 \leq b$ für alle $b \in B$.

Beispiel 1.10 Drei Graphen (A, \rightarrow) , bei denen \rightarrow^* ein Baum bzw. kein Baum ist:



Wir werden nur endliche Bäume brauchen, und zwar zur Darstellung von syntaktischen Strukturen:



Dazu werden die Punkte (Knoten) des Baums mit Symbolen markiert, die die üblichen syntaktischen Kategorien (Nominalphrase, Verbalphrase usw.) repräsentieren.

Bei diesen Bäumen kommt es auch auf eine Anordnung der Zweige an, was in der bisherigen Definition nicht berücksichtigt ist.

1.5 Alphabete und Formale Sprachen

Eine natürliche Sprache kann man sehr grob als eine Menge von Wort- (bzw. Buchstaben- oder Laut-) Folgen auffassen. Diese Abstraktion erweist sich als nützlich, obwohl dabei von wesentlichen Eigenschaften natürlicher Sprachen abgesehen wird.

Definition 1.11 Sei Σ eine endliche Menge, das ALPHABET. Ein WORT w über Σ ist eine endliche Folge (a_1, \dots, a_n) von Buchstaben aus Σ , kurz $w = a_1 \dots a_n$. Mit

$$\Sigma^* := \{ w \mid w \text{ ist ein Wort über } \Sigma \}$$

wird die Menge aller Wörter über Σ bezeichnet. Das LEERE WORT ist die Folge $()$ ohne Elemente, oft mit ε bezeichnet. Sind w, v Wörter, so ist auch ihre VERKETTUNG $w \cdot v$ wieder ein Wort:

$$(a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_m) := (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$$

Wir betrachten $a \in \Sigma$ auch als das Wort (a) über Σ . Meistens schreiben wir vw statt $v \cdot w$. Die LÄNGE $|w|$ von w ist gegeben durch $|\varepsilon| = 0$ und $|wa| = |w| + 1$ für $a \in \Sigma$.

Beispiel 1.12 (i) Für Wörter $v, w \in \Sigma^*$ sei $v \leq_{Länge} w : \iff |v| \leq |w|$, d.h. wenn v höchstens so lang wie w ist. Die Relation $\leq_{Länge}$ ist keine partielle Ordnung auf Σ^* , da sie nicht antisymmetrisch ist: zum Beispiel ist $kurz \leq_{Länge} lang$ und $lang \leq_{Länge} kurz$, aber diese Wörter sind verschieden.

(ii) Die TEILWORTRELATION, definiert durch

$$u \leq_{infix} w : \iff \exists v_1 \in \Sigma^* \exists v_2 \in \Sigma^* v_1 u v_2 = w,$$

ist eine partielle Ordnung auf Σ^* , die nicht total, aber fundiert ist. Das gleiche gilt für die PRÄFIX- und SUFFIXRELATIONEN, die durch

$$\begin{aligned} u \leq_{präfix} w & : \iff \exists v \in \Sigma^* uv = w, & \text{und} \\ u \leq_{suffix} w & : \iff \exists v \in \Sigma^* vu = w \end{aligned}$$

definiert sind.

(iii) Sei Σ mit einer vorgegebenen totalen Ordnung \leq_{Σ} der Buchstaben versehen. Die LEXIKOGRAPHISCHE ORDNUNG $v \leq_{lex} w$ von Wörtern $v, w \in \Sigma^*$ ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} v \leq_{lex} w & : \iff v = w \text{ oder } v <_{lex} w, \\ a_1 \cdots a_n <_{lex} b_1 \cdots b_m & : \iff \\ & \quad (i) \quad n = 0 < m & \text{oder} \\ & \quad (ii) \quad n \neq 0 \neq m \wedge a_1 <_{\Sigma} b_1 & \text{oder} \\ & \quad (iii) \quad n \neq 0 \neq m \wedge a_1 = b_1 \wedge a_2 \cdots a_n <_{lex} b_2 \cdots b_m. \end{aligned}$$

Die lexikographische Ordnung (Σ^*, \leq_{lex}) ist total, aber nicht fundiert: sind $a <_{\Sigma} b$ aus Σ , so bildet

$$a^{n+1}b <_{lex} a^n b, \quad n \in \mathbb{N},$$

eine unendliche echt absteigende Folge. Hier ist $a^0 := \varepsilon$ und $a^{n+1} := a^n \cdot a$.

Definition 1.13 Ein MONOID $(M, \cdot, 1)$ ist eine Menge M mit einer Funktion $\cdot : M \times M \rightarrow M$ und einem Element $1 \in M$, so daß

- (i) \cdot ist assoziativ: $\forall u, v, w \in M : u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w$, und
- (ii) 1 ist neutral bezüglich \cdot : $\forall u \in M : u \cdot 1 = u = 1 \cdot u$.

Wegen der Assoziativität von \cdot kann man Klammern weglassen. M wird von $E \subseteq M$ FREI ERZEUGT, wenn jedes $m \in M$ sich in eindeutiger Weise als Produkt mit Faktoren aus E schreiben läßt, d.h. wenn

- (i) $\forall m \in M \exists k \in \mathbb{N} \exists u_1, \dots, u_k \in E : m = u_1 \cdots u_k$,
- (ii) $\forall u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_l \in E (u_1 \cdots u_k = v_1 \cdots v_l \implies k = l \wedge u_1 = v_1 \wedge \dots \wedge u_k = v_k)$.

Dabei verstehen wir 1 als das Produkt von 0 Faktoren aus E .

Beispielsweise sind $(\mathbb{N}, \cdot, 1)$ und $(\mathbb{Z}, +, 0)$, mit der üblichen Multiplikation \cdot bzw. Addition $+$, zwei Monoide; sie werden aber nicht frei erzeugt, denn $2 \cdot 6 = 4 \cdot 3$ oder $2 + 2 = 1 + 3$.

Aber die Verkettung von Wörtern über einem Alphabet ist assoziativ, das leere Wort ist bezüglich der Verkettung neutral, und jedes Wort läßt sich in eindeutiger Weise als Verkettung von Buchstaben schreiben. Daher gilt:

Proposition 1.14 $(\Sigma^*, \cdot, \varepsilon)$ ist ein von Σ frei erzeugtes Monoid.

Wenn in einem Monoid $(M, \cdot, 1)$ für ein Produkt $u \cdot v$ und den linken Faktor u (bzw. den rechten Faktor v) der andere eindeutig bestimmt ist, kann man die Multiplikation durch eine "Division von links", \backslash , (bzw. eine "Division von rechts", $/$) rückgängig machen:

$$u \backslash w = v \iff w = u \cdot v \iff w / v = u.$$

Allerdings sind diese DIVISIONEN $\backslash, / : M \times M \rightarrow M$ im allgemeinen nur partielle Funktionen. Ist die Multiplikation \cdot kommutativ, so fallen \backslash und $/$ zusammen.

Beispiel 1.15 (i) Für das kommutative Monoid $(\mathbb{Z}, +, 0)$ sind die Divisionen $\backslash, /$ gleich und total, nämlich die übliche Subtraktion:

$$w - u = v \iff w = u + v.$$

- (ii) Für das kommutative Monoid $(\mathbb{N}, \cdot, 1)$ sind die Divisionen die übliche, partielle Division: falls $\frac{w}{u} \in \mathbb{N}$ ist, gilt

$$\frac{w}{u} = v \iff w = u \cdot v.$$

Aber nicht jedes $w \in \mathbb{N}$ läßt sich durch jedes $u \in \mathbb{N}$ dividieren; so ist etwa $\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$.

- (iii) Auch bei $(\Sigma^*, \cdot, \epsilon)$ sind die Divisionen nur partiell: falls $w = u \cdot v$, so ist v durch u und w bzw. u durch v und w eindeutig bestimmt, und

$$\begin{aligned} u \setminus w &= \text{das durch Weglassen des Präfixes } u \text{ von } w \text{ verbleibende Suffix von } w, \\ w/v &= \text{das durch Weglassen des Suffixes } v \text{ von } w \text{ verbleibende Präfix von } w. \end{aligned}$$

Also ist $a \setminus (abcaca) = bcaca$ und $(abaca)/ca = aba$, aber $(abcaca)/bc$ ist undefiniert, da bc kein Suffix von $abcaca$ ist.

Wenn man Wörter als (Buchstaben-) Listen und ihre Verkettung als eine Addition auffaßt, nennt man w/v auch die DIFFERENZLISTE aus w und v .

Wenn die Quotienten existieren, gelten (modifiziert) die üblichen Rechenregeln, z.B.

$$(w/v) \cdot v = w = u \cdot (u \setminus w), \quad (w/v) \cdot (v/u) = w/u, \quad w/(u \cdot v) = (w/v)/u.$$

Definition 1.16 Eine FORMALE SPRACHE über Σ ist eine Wortmenge $L \subseteq \Sigma^*$.

Da formale Sprachen beliebige Teilmengen von Σ^* sind, ist die Gesamtheit aller formalen Sprachen über Σ abgeschlossen unter den mengentheoretischen Operationen:

$$\bar{L} = \Sigma^* - L, \quad L_1 \cup L_2, \quad L_1 \cap L_2, \quad \emptyset, \quad \Sigma^*.$$

Hauptsächlich werden wir folgende Operationen betrachten, unter denen die Klasse der Sprachen ebenfalls abgeschlossen ist:

$$\begin{aligned} L \cdot M &:= \{ u \cdot v \mid u \in L, v \in M \} \\ L^* &:= \bigcap \{ S \mid L \subseteq S \subseteq \Sigma^*, \epsilon \in S, S \cdot S \subseteq S \} \\ L \setminus M &:= \{ w \mid \text{für alle } v \in L \text{ ist } v \cdot w \in M \} \\ M/L &:= \{ w \mid \text{für alle } v \in L \text{ ist } w \cdot v \in M \} \end{aligned}$$

Man nennt $L \cdot M$ das SPRACHPRODUKT von L und M , L^* die SPRACHITERATION von L , $L \setminus M$ die LINKSDIVISION VON M DURCH L und M/L die RECHTSDIVISION VON M DURCH L .

Beachte, daß zum Beispiel $L \cdot (L \setminus M) \subseteq M$ und $(M/L) \cdot L \subseteq M$ gelten. Die Sprachdivisionen \setminus und $/$ sind total. Sie spielen eine wesentliche Rolle bei der Beschreibung von Sprachen durch Kategorialgrammatiken (vgl. Kapitel 10).

Die Sprachiteration L^* ist der ABSCHLUSS VON L unter Verkettung und ε und kann nach Lemma 1.2 auch so dargestellt werden:

$$\begin{aligned} L^* &= \bigcup \{ L^n \mid n \in \mathbb{N} \}, \quad \text{mit } L^0 := \{ \varepsilon \}, \quad L^{n+1} := L^n \cdot L, \\ &= \{ w_1 \cdots w_n \mid n \geq 1, w_1 \in L, \dots, w_n \in L \} \cup \{ \varepsilon \} \end{aligned}$$

Gelegentlich braucht man auch die SPIEGELUNG L^{-1} einer Sprache L , die durch

$$L^{-1} := \{ w^{-1} \mid w \in L \} \quad \text{mit } \varepsilon^{-1} := \varepsilon, \quad (w \cdot a)^{-1} := a \cdot w^{-1}$$

definiert ist. Sie verhält sich zur Vereinigung und zum Sprachprodukt ähnlich wie die Inverse zur Vereinigung und zum Relationenprodukt, d.h. es gilt

$$(L_1 \cup L_2)^{-1} = L_1^{-1} \cup L_2^{-1}, \quad (L_1 \cdot L_2)^{-1} = L_2^{-1} \cdot L_1^{-1}, \quad (L^{-1})^{-1} = L.$$

Beispiel 1.17 Sei $\Sigma = \{a, b, \dots, z\}$. Dann ist

- (i) $\{a, b\} \cdot \Sigma^*$ = Menge aller Wörter, die mit a oder b beginnen,
- (ii) $\Sigma^* w \Sigma^*$ = Menge aller Wörter, in denen das Teilwort w vorkommt.
- (iii) Ist $N \supseteq \{\text{Haus, Tor, Schloß, Schlüssel, } \dots\}$ die Menge der einfachen deutschen Nomina, so umfaßt N^* die Nomenkomposita, z.B. Haustor, Torschloß, Haustorschlüssel.
- (iv) Ist M eine Menge von Formen deutscher Verben und $L = \{e, st, t, en, t\}$ die Menge der Endungen für die verschiedenen Personen, so besteht M/L aus den Stämmen der Verben, deren finite Formen (im Indikativ Präsens) alle in M vorkommen:

$$geh \in M/L \iff \{gehe, gehst, geht, gehen, geht\} \subseteq M.$$

- (v) $P := \{w \mid w \in \Sigma^*, w = w^{-1}\}$ heißt die Sprache der PALINDROME über Σ .

Palindrome sind also Wörter oder Sätze, die sich vorwärts wie rückwärts lesen lassen, z.B. Retter, Otto, neppen. Ein schönes Kunststück ist folgendes Palindromgedicht von H. Pfeiffer[18]:

... 's nutzt uns!
Eins nutzt uns:
Amore!
Die Rederei da,
die Rederei der Omas,
nutzt uns nie.

Aufgaben

Aufgabe 1.1 Eine 2-stellige Funktion $+ : A \times A \rightarrow A$ heißt (a) IDEMPOTENT, wenn $a + a = a$ für alle $a \in A$, (b) ASSOZIATIV, wenn $a + (b + c) = (a + b) + c$ für alle a, b und $c \in A$, und (c) KOMMUTATIV, wenn $a + b = b + a$ für alle a und $b \in A$. Definiere auf A eine zweistellige Relation \leq durch

$$b \leq c \quad : \iff \quad b + c = c.$$

Man zeige:

- (i) \leq ist reflexiv genau dann, wenn $+$ idempotent ist,
- (ii) \leq ist transitiv, wenn $+$ assoziativ ist,
- (iii) \leq ist antisymmetrisch, wenn $+$ kommutativ ist.

Wenn also $+$ idempotent, assoziativ, und kommutativ ist, so ist \leq eine partielle Ordnung.

Bem. Ist $+$ die Vereinigung von Mengen, so ist \leq die Teilmengenbeziehung \subseteq .

Aufgabe 1.2 Sei $A = \{a, b, c, d\}$ und $R = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (d, c)\}$. Man gebe den reflexiven und den transitiven Abschluß von R an, und den reflexiven und transitiven Abschluß R^* . (Bilder zeichnen!)

Aufgabe 1.3 Sei (A, \leq^A) eine partiell geordnete Menge, und $B \subseteq A$. Definiere

$$\leq^B := \{(b, c) \mid b, c \in B, b \leq^A c\}.$$

Man zeige, daß auch (B, \leq^B) eine partiell geordnete Menge ist.

Aufgabe 1.4 Seien \mathcal{R} und \mathcal{S} Mengen von von zweistelligen Relationen auf der Menge M . Man zeige, daß

$$\bigcup \{R \circ S \mid R \in \mathcal{R}, S \in \mathcal{S}\} = \bigcup \mathcal{R} \circ \bigcup \mathcal{S}.$$

Aufgabe 1.5 Eine Abbildung $h : M \rightarrow N$ ist ein *Homomorphismus* vom Monoid $\mathcal{M} = (M, \cdot^M, 1^M)$ in das Monoid $\mathcal{N} = (N, \cdot^N, 1^N)$, wenn $h(1^M) = 1^N$ und $h(a \cdot^M b) = h(a) \cdot^N h(b)$ für alle $a, b \in M$.

Definiere für $a \in \Sigma$ die Abbildung $|\cdot|_a : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ durch

$$|w|_a := \text{die Anzahl der Vorkommen von } a \text{ in } w.$$

- (i) Man zeige, daß die Abbildung $|\cdot|_a : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ ein Homomorphismus von $(\Sigma^*, \cdot, \epsilon)$ nach $(\mathbb{N}, +, 0)$ ist.
- (ii) Seien $f, g : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ zwei Homomorphismen von $(\Sigma^*, \cdot, \epsilon)$ nach $(\mathbb{N}, +, 0)$. Man zeige, daß auch die Abbildung $(f + g) : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$, mit

$$(f + g)(w) := f(w) + g(w),$$

ein Homomorphismus von $(\Sigma^*, \cdot, \epsilon)$ nach $(\mathbb{N}, +, 0)$ ist.

- (iii) Man folgere aus der vorigen Eigenschaft, daß für $a, b \in \Sigma$ auch die Abbildung

$$|\cdot|_{a,b} : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad |w|_{a,b} := |w|_a + |w|_b$$

und die Wortlänge $|\cdot| : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ Homomorphismen von $(\Sigma^*, \cdot, \epsilon)$ nach $(\mathbb{N}, +, 0)$ sind.

- (iv) In der umgekehrten Richtung ist für jedes $a \in \Sigma$ die Abbildung $p_a : \mathbb{N} \rightarrow \Sigma^*$ mit

$$p_a(n) := a^n, \quad \text{wobei } a^0 := \epsilon, \quad a^{k+1} := a^k \cdot a,$$

ein Homomorphismus von $(\mathbb{N}, +, 0)$ nach $(\Sigma^*, \cdot, \epsilon)$. Für welche $a, b \in \Sigma$ ist die durch

$$(p_a \cdot p_b)(n) := p_a(n) \cdot p_b(n)$$

definierte Abbildung $p_a \cdot p_b : \mathbb{N} \rightarrow \Sigma^*$ ein Homomorphismus?

Aufgabe 1.6 Man zeige für die Division von Sprachen über einem Alphabet Σ :

- (i) $M \setminus L \subseteq N \iff L \subseteq M \cdot N \iff L/N \subseteq M$,
- (ii) $L/M = \bigcup \{ X \mid X \cdot M \subseteq L \}$, also die größte Sprache $X \subseteq \Sigma^*$ mit $X \cdot M \subseteq L$,
- (iii) $L/(M_1 \cup M_2) = L/M_1 \cap L/M_2$ und $(L_1 \cap L_2)/M = L_1/M \cap L_2/M$.

Aus der letzten Aussage folgt, daß die Sprachdivision / die Monotonie-Eigenschaft

$$L_1 \subseteq L_2 \wedge M_1 \subseteq M_2 \implies L_1/M_2 \subseteq L_2/M_1.$$

hat; das ist analog zu $l_1 \leq l_2 \wedge m_1 \leq m_2 \implies l_1/m_2 \leq l_2/m_1$ bei Zahlen.