Formale Sprachen und Automaten

H.Leiß, CIS, WS 2005/06

Lösung zu Aufgabe 7.1:

(i) Das Gleichungssystem lautet:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_1 + x_2 && (1)\\ x_1 &= ax_3 && (2)\\ x_2 &= ax_1 + bx_2 + bx_4 && (3)\\ x_3 &= ax_2 + bx_3 && (4)\\ x_4 &= ax_2 + bx_3 + 1 && (5) \end{aligned}$$

(ii) Wir beseitigen zuerst $x_4 = ax_2 + bx_3 + 1$ durch Einsetzen in die übrigen Gleichungen und erhalten

$$\begin{aligned} x_0 &= x_1 + x_2 && (6)\\ x_1 &= ax_3 && (7)\\ x_2 &= ax_1 + bx_2 + b(ax_2 + bx_3 + 1) \\ &= ax_1 + bx_2 + bax_2 + bbx_3 + b && (8)\\ x_3 &= ax_2 + bx_3 && (9) \end{aligned}$$

und nun $x_3 = ax_2 + bx_3$ nach dem Lemma von Arden durch den Lösungsausdruck $b^*(ax_2)$:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_1 + x_2 && (10)\\ x_1 &= a(b^*ax_2) && (11)\\ x_2 &= ax_1 + bx_2 + bax_2 + bb(b^*ax_2) + b && (12)\\ &= ax_1 + b + (b + ba + bbb^*a)x_2. && (13) \end{aligned}$$

Nun eliminiert man analog x_2 durch $(b + ba + bbb^*a)^*(ax_1 + b)$, was zu

$$\begin{aligned} x_0 &= x_1 + (b + ba + bbb^*a)^*(ax_1 + b) && (14)\\ x_1 &= ab^*a(b + ba + bbb^*a)^*(ax_1 + b) && (15)\\ &= ab^*a(b + ba + bbb^*a)^*ax_1 + ab^*a(b + ba + bbb^*a)^*b && (16) \end{aligned}$$

führt. Wir eliminieren nun x_1 durch $(ab^*a(b + ba + bbb^*a)^*a)^*(ab^*a(b + ba + bbb^*a)^*b)$ und erhalten

$$\begin{aligned} x_0 &= (ab^*a(b + ba + bbb^*a)^*a)^*(ab^*a(b + ba + bbb^*a)^*b) && (17)\\ &\quad +(b + ba + bbb^*a)^*(a(ab^*a(b + ba + bbb^*a)^*a)^*(ab^*a(b + ba + bbb^*a)^*b) + b) && (18) \end{aligned}$$

wobei hoffentlich kein Kopierfehler aufgetreten ist. (Es ist etwas einfacher, wenn man x_1 vor x_2 eliminiert.)

(iii) Den Summanden in den Gleichungen $z = \ldots + dx + \ldots$ und $x = (ay+bv)+bx$ entsprechen die Kanten $z \xrightarrow{d} x$ und $x \xrightarrow{a} y$, $x \xrightarrow{b} v$, $x \xrightarrow{b} x$. Die Lösung $x = b^*(ay+bv) = b^*ay + b^*bv$ bedeutet, die drei von x ausgehenden Kanten durch die zwei Kanten $x \xrightarrow{b^*a} y$, $x \xrightarrow{b^*b} v$ zu ersetzten; es entstehen also Kanten mit regulären Ausdrücken (ohne Variable) als Beschriftung. Die Elimination von x bedeutet, Kanten nach x mit Kanten aus x "transitiv" zu verbinden: aus $z \xrightarrow{d} x$ und $x \xrightarrow{b^*a} y$ wird $z \xrightarrow{db^*a} y$, und aus $z \xrightarrow{d} x$ und $x \xrightarrow{b^*b} v$ wird $z \xrightarrow{db^*b} v$.

Falls x ein Endzustand war, also etwa bei $x = (ay + bv + 1) + bx$, so hat die Lösung $x = b^*(ay + bv + 1) = b^*ay + b^*bv + b^*$ einen konstanten Summanden, b^*, den man durch b^*u mit neuer Gleichung $u = 1$ darstellen kann, also einer Kante $x \xrightarrow{b^*} u$ in einen neuen Endzustand u, der bei der Elimination von x, hier also in der Kante $z \xrightarrow{db^*} u$ erhalten bleibt.

△

Lösung zu Aufgabe 7.2: Das Gleichungssystem ist

$$x_0 = ax_1 + x_1 + cx_2 \tag{19}$$
$$x_1 = x_0 + ax_2 + x_3 \tag{20}$$
$$x_2 = bx_3 + ax_4 \tag{21}$$
$$x_3 = x_0 + ax_4 + ax_5 + bx_6 \tag{22}$$
$$x_4 = x_0 + bx_0 \tag{23}$$
$$x_5 = bx_4 + 1 \tag{24}$$
$$x_6 = cx_1 + ax_5 \tag{25}$$

(i) Nach I.1 betrachten wir den ϵ-Kreis $x_0 \xrightarrow{1} x_1 \xrightarrow{1} x_0$. Nach I.2 soll in der rechten Seite der Gleichung für die zweite Variable des Kreises, hier $x_j = x_1$, jeder der Summanden x_k von Variablen des Kreises (Tippfehler: das x_k in I.2 der Aufgabe hätte ein x_i sein sollen) durch 0 ersetzt werden, woraus der reguläre Ausdruck $r'_j = r'_1$ entsteht, hier $r'_1 = 0 + ax_2 + x_3 = ax_2 + x_3$. Nach I.3 soll $x_1 = r_1$ weggelassen werden. Nach I.4 sollen die Summanden x_1 durch r'_1 und die Faktoren x_1 durch die erste Variable des Kreises, $x_i = x_0$, ersetzt werden. Das ergibt:

$$x_0 = ax_0 + (ax_2 + x_3) + cx_2 \tag{26}$$
$$x_2 = bx_3 + ax_4 \tag{27}$$
$$x_3 = x_0 + ax_4 + ax_5 + bx_6 \tag{28}$$
$$x_4 = x_0 + bx_0 \tag{29}$$
$$x_5 = bx_4 + 1 \tag{30}$$
$$x_6 = cx_0 + ax_5 \tag{31}$$

Nun ist der betrachtete ϵ-Kreis beseitigt und x_1 verschwunden (wir haben Zustand 1 mit 0 verschmolzen).

(ii) Den Automaten zu diesem Gleichungssystem male ich jetzt hier nicht.

(iii) Der verbliebene ϵ-Kreis $x_0 \xrightarrow{1} x_3 \xrightarrow{1} x_0$ (des neuen Gleichungssystems) wird ebenso behandelt: in der rechten Seite von $x_3 = x_0 + ax_4 + ax_5 + bx_6$ ersetzen wir die Summanden x_0 und x_3 durch 0 und erhalten $r_3' = ax_4 + ax_5 + bx_6$. Die Gleichung für x_3 wird weggelassen, in den übrigen die Summanden x_3 durch r_3' ersetzt und die Faktoren x_3 durch x_0; das ergibt:

$$\begin{aligned}
x_0 &= ax_0 + (ax_2 + (ax_4 + ax_5 + bx_6)) + cx_2 && (32)\\
x_2 &= bx_0 + ax_4 && (33)\\
x_4 &= x_0 + bx_0 && (34)\\
x_5 &= bx_4 + 1 && (35)\\
x_6 &= cx_0 + ax_5 && (36)
\end{aligned}$$

(iv) Jetzt hat man keine ϵ-Kreise mehr, aber noch einen ϵ-Weg, $x_4 \xrightarrow{1} x_0$: Nach II.6 sollen Summanden, die aus der letzten Variable des Wegs, hier x_0, bestehen, in allen rechten Seiten durch die rechte Seite der Gleichung dieser Variable x_0 ersetzt werden. Das ergibt

$$\begin{aligned}
x_0 &= ax_0 + (ax_2 + (ax_4 + ax_5 + bx_6)) + cx_2 && (37)\\
x_2 &= bx_0 + ax_4 && (38)\\
x_4 &= (ax_0 + (ax_2 + (ax_4 + ax_5 + bx_6)) + cx_2) + bx_0 && (39)\\
x_5 &= bx_4 + 1 && (40)\\
x_6 &= cx_0 + ax_5 && (41)
\end{aligned}$$

(v) Eine Lösung $(L_0, \ldots, L_n)$ durch Sprachen L_i ist die *kleinste* Lösung eines solchen Gleichungssystems, wenn jede andere Lösung $(L_0', \ldots, L_n')$ in jeder Komponente mindestens ebenso groß ist, d.h wenn $L_i \subseteq L_i'$ für alle i.

Die kleinsten Lösungen des Ausgangssystems und des entstandenen Gleichungssystems sind dieselben. Betrachtet man das Ausgangssystems $x = ax + x + 1$ über $\Sigma = \{a, b\}$, so sind die (durch reguläre Ausdrücke angegebenen) Sprachen $(a + b)^* \supseteq a^*b^* \supseteq a^*$ drei verschiedene Lösungen, wovon a^* die kleinste ist. Durch Beseitigen des ϵ-Kreises $x \xrightarrow{1} x$ entsteht die Gleichung $x = ax + 0 + 1 = ax + 1$, die nach dem Lemma von Arden genau eine Lösung hat, nämlich a^*.

$\triangle$