Übungsaufgaben
Automaten und Formale Sprachen

Universität München, CIS, WS 2005/2006

Ausgabe: Do 26.1.06 Abgabe: Mi 1.2.06

Aufgabe 9.1 Sei $t \in \Sigma^+$ ein Text über dem Alphabet Σ. Die Teilwortrelation sei mit

$$w_1 \leq w_2 : \Longleftrightarrow \exists u, v \in \Sigma^*(uw_1v = w_2)$$

bezeichnet und die Menge aller Teilwörter von t mit

$$\Sigma^t := \{\, w \in \Sigma^* \mid w \leq t \,\}.$$

Da Σ^t nicht unter Verkettung abgeschlossen ist, definieren wir die Operationen $+, \cdot, ^*$ von 2^{Σ^*} um:

$$A + B := (A \cup B) \cap \Sigma^t, \qquad A \cdot B := (AB) \cap \Sigma^t, \qquad A^* := (A^*) \cap \Sigma^t.$$

(a) Zeige, daß $Sub(t) := (\Sigma^t, +, \cdot, ^*, \emptyset, \{\epsilon\})$ mit diesen Operationen eine Kleene-Algebra ist. (3 Punkte)

(b) Zeige, daß $Sub(t)$ eine stetige Kleene-Algebra ist: (6 Punkte)

(a) für gerichtete Mengenfamilien $\{\, A_i \subseteq \Sigma^t \mid i \in I \,\}$ ist $\bigcup_{i\in I} A_i$ die kleinste obere Schranke,

(b) die Operationen $+, \cdot, ^*$ sind stetig, für gerichtete $\{\, A_i \mid i \in I \,\}$ gilt also z.B.

$$A \cdot (\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} (A \cdot B_i).$$

Aufgabe 9.2 Sei G die kontextfreie Grammatik

$$N = p \mid d\ n\ S \quad (1)$$
$$S = r\ N\ V \quad (2)$$
$$V = v \quad (3)$$

über dem Alphabet $\Sigma := \{d, n, r, p, v\}$ (Determinator, Nomen, (Relativ)Pronomen, transitives Verb).

(a) Die „Bedeutung“ von G in 2^{Σ^*} ist das Tupel der kleinsten Sprachen $N, S, V \subseteq \Sigma^*$, das (1)–(3) erfüllt. Berechne die ersten Stadien

$$(N_0, S_0, V_0) := (\emptyset, \emptyset, \emptyset) \subseteq (N_1, S_1, V_1) \subseteq (N_2, S_2, V_2) \subseteq (N_3, S_3, V_3)$$

davon wie im Beweis des Fixpunktsatzes, d.h. das nächste Stadium erhält man durch Auswerten der rechten Seiten aus dem vorigen Stadium. (3 Punkte)

(b) Nach dem Fixpunktsatz hat G in *jeder stetigen* Kleene-Algebra $(K, +, \cdot, ^*, 0, 1)$ mit Elementen d, n, r, p, v eine Bedeutung, eben das kleinste Tupel $(N, S, V) \in K^3$, das (1)–(3) löst. Nach der vorigen Aufgabe hat also G für jedes $t \in \Sigma^+$ auch eine Bedeutung in $Sub(t)$. Da $Sub(t)$ endlich ist, erreicht man den kleinsten Fixpunkt schon nach endlich vielen Stadien der Fixpunktberechnung!

Führe diese Berechnung für den Text

$$t := p\ v\ d\ n\ r\ d\ n\ r\ p\ v\ v$$

durch! (Ab wann unterscheiden sich die Stadien (N_i, S_i, V_i) von denen im Teil (a)?). (5 Punkte)

(c) Zeichne alle Syntaxbäume der Höhe ≤ 3 und prüfe, in welchen Stadien der Fixpunktberechnung die Wörter an den Blättern erstmals auftreten. (4 Punkte)