Übungsaufgaben
Automaten und Formale Sprachen

Universität München, CIS, WS 2005/2006

Ausgabe Mi 7.12.05 Abgabe: Mo 12.12.05

Aufgabe 5.1 In jeder Kleene-Algebra $\mathcal{K} = (K, +^K, 0^K, \cdot^K, 1^K, {}^{*K})$ gilt für alle $c \in K$ die Gleichung

$$c^* \cdot c^* = c^*.$$

Beweise das mit den Axiomen von Kozen

$$\begin{array}{lllll} (KA\ 1) & \forall a \forall b: & a \cdot a^* + 1 \leq a^* & \wedge & \forall x (a \cdot x + b \leq x \;\rightarrow\; a^* \cdot b \leq x) \\ (KA\ 2) & \forall a \forall b: & a^* \cdot a + 1 \leq a^* & \wedge & \forall x (a \cdot x + b \leq x \;\rightarrow\; a^* \cdot b \leq x) \end{array}$$

und den Halbringeigenschaften. (Notation: * bindet stärker als $\cdot$, und das stärker als $+$) (4 Punkte)

Hinweis: Zeige getrennt $a^* \leq a^* a^*$ und $a^* a^* \leq a^*$.

Aufgabe 5.2 Sei

$$\mathcal{R} = (2^{M \times M}, \cup, \emptyset, \circ, 1_M, {}^*)$$

die Kleene-Algebra der 2-stelligen Relationen über der Menge $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und

$$\mathcal{L} = (2^{\Sigma^*}, \cup, \emptyset, \cdot, \{\epsilon\}, {}^*)$$

die Kleene-Algebra aller Sprachen über $\Sigma := \{a, b, c\}$.

(a) Wie viele Elemente x mit $0 \leq x \leq 1$ gibt es in $\mathcal{R}$ und in $\mathcal{L}$, und welche sind das? (3 Punkte)

(b) Sei $E := \{ L \subseteq \Sigma^* \mid \forall w \in L\ |w|_a = |w|_b \}$ die Menge der Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$, deren Elemente dieselbe Anzahl von Vorkommen von a wie von b haben und $\mathcal{E}$ die Einschränkung von $\mathcal{L}$ auf die Grundmenge $E \subseteq 2^{\Sigma^*}$, d.h. $\cup$ ist die Vereinigung von Mengen aus E, usw. Ist $\mathcal{E}$ eine Kleene-Algebra? (1 Punkt)

(c) Ist jede Unteralgebra $\mathcal{B} = (B, +^B, 0^B, \cdot^B, 1^B, {}^{*B})$ einer Kleene-Algebra $\mathcal{A} = (A, +^A, 0^A, \cdot^A, 1^A, {}^{*A})$, d.h. wenn $B \subseteq A$ die Elemente $0^A, 1^A$ enthält und die Operationen in $\mathcal{B}$ die Einschränkungen der Operationen in $\mathcal{A}$ auf die Elemente aus B sind, wieder eine Kleene-Algebra? (2 Punkte)

Aufgabe 5.3 Sei $\mathcal{A} = (Q, \xrightarrow{a}, \xrightarrow{b}, I, F)$ der endliche Automat mit Zustandsmenge $Q = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, den Übergangsrelationen

$$\xrightarrow{a} = \{(0,1), (0,2), (2,3), (3,1), (4,5), (5,1)\} \quad \text{und} \quad \xrightarrow{b} = \{(0,2), (0,1), (1,1), (3,2), (3,4), (4,2)\},$$

der Menge $= \{0\}$ von Anfangszuständen und der Menge $F = \{5, 1, \}$ von Endzuständen.

(a) Akzeptiert $\mathcal{A}$ die Wörter *abbb*, *aabba*, *bbaab*, *aabababaa*? (2 Punkte)

(b) Ist $\mathcal{A}$ deterministisch? Ist $\mathcal{A}$ total? (2 Punkte)

(c) Können Sie einen regulären Ausdruck r angeben, der die von $\mathcal{A}$ erkannte Sprache definiert, also $L(r) = L(\mathcal{A})$ erfüllt? (4 Punkte)

Frage 1 Wieviel Zeit steckebn Sie normalerweise in die Bearbeitung der Aufgaben, und kommt Ihnen das zu viel oder zu wenig vor?

Frage 2 Welche Begriffe, Argumente oder Beispiele aus der Vorlesung sind unklar geblieben, und was fehlt Ihnen zum Verständnis?