Übungsaufgaben
Automaten und Formale Sprachen

Universität München, CIS, WS 2005/2006

Ausgabe Mo 7.11.2005 Abgabe: Mo 14.11.05 - verlängert bis 21.11.05

Aufgabe 3.1 Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Berechne die Bedeutung des regulären Ausdrucks $r := (a + 1) \cdot b^*$

(a) bei der Sprachinterpretation $\mathcal{L}_\Sigma = (2^{\Sigma^*}, \cup, \cdot, {}^*, \emptyset, \{\epsilon\}, \{a\}, \{b\})$ (2 Punkte)

(b) bei der Relationeninterpretation $\mathcal{R} = (2^{M\times M}, \cup, \ , {}^*, \emptyset, 1_M, R_a, R_b)$ aller 2-stelligen Relationen über der Grundmenge $M = \{0, 1, 2, \ldots, 9, 10\}$, und den Relationen (3 Punkte)

$$R_a := \{\, \langle i, i + 1\rangle \mid i \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq i < 10 \,\} \quad \text{und} \quad R_b := \{\, \langle i, i^2\rangle \mid i \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq i \leq 3 \,\}.$$

Aufgabe 3.2 Man gebe einen regulären Ausdruck r über $\Sigma = \{a, b, c\}$ an, sodaß $L(r)$ aus allen Wörtern $w \in \Sigma^*$ mit der Eigenschaft

$$\varphi(w) :\Longleftrightarrow \text{ die Anzahl der Vorkommen von } b \text{ in } w \text{ ist eine gerade Zahl}$$

besteht. (2 Punkte)

Aufgabe 3.3 Erlaubt man beim Aufbau regulärer Ausdrücke über Σ auch Variable $x_1, x_2, \ldots$, so muß zur Interpretation eine Belegung der Variablen x_i durch Sprachen $A_i \subseteq \Sigma^*$ bekannt sein. Ist $r(x_1, \ldots, x_n)$ ein regulärer Ausdruck, dessen Variable unter $x_1, \ldots, x_n$ vorkommen, und $[A_1, \ldots, A_n]$ eine *Belegung*, d.h. eine n-elementige Liste von Sprachen, so braucht man bei der Definition der Sprache

$$L(r)[A_1, \ldots, A_n] \subseteq \Sigma^*$$

neben den Fällen aus der Vorlesung den weiteren Fall, wo r eine Variable x_i ist:

$$L(x_i)[A_1, \ldots, A_n] := A_i.$$

Sei $A_1 = \{abb, aab, aba\}$ und $A_2 = \{\, (abaa)^n \mid 1 \leq n \leq 10 \,\}$. Berechne die Bedeutung $L(r)[A_1, A_2]$ für den regulären Ausdruck $r = (ax_1)^* + x_2x_1$ (3 Punkte)

Bemerkung: Wenn nicht alle der $A_1, \ldots, A_n$ regulär sind, ist auch $L(r)[A_1, \ldots, A_n]$ i.a. nicht regulär.

Aufgabe 3.4 Für jedes $a \in \Sigma$ sei $R_a \subseteq M \times M$ eine zweistellige Relation auf der Menge M. Für Relationen $R, S \subseteq M \times M$ seien wie üblich

$$R \circ S \quad := \quad \{\, \langle k, m\rangle \in M \times M \mid \exists l \in M(\langle k, l\rangle \in S \wedge \langle l, m\rangle \in S) \,\}$$

das Relationenprodukt von R und S und

$$R^* \quad := \quad \bigcap\{\, S \subseteq M \times M \mid 1_M \subseteq S,\ S \circ S \subseteq S,\ R \subseteq S \,\}$$

die reflexive, transitive Hülle von R. Definiere für $L \subseteq \Sigma^*$ die Relation

$$\vdash_L \quad := \quad \bigcup\{\, \vdash_w \mid w \in L \,\} \quad \subseteq M \times M,$$

und dazu für $w \in \Sigma^*$ die Relation $\vdash_w$ induktiv durch

$$\vdash_\epsilon \quad := \quad 1_M, \qquad \vdash_a \quad := \quad R_a, \qquad \vdash_{va} \quad := \quad \vdash_v \circ \vdash_a .$$

(a) Zeige, daß $\vdash_{L \cdot L'} = \vdash_L \circ \vdash_{L'}$ für Sprachen $L, L' \subseteq \Sigma^*$. (3 Punkte)

(b) Zeige (mit Hilfe von (a)), daß $\vdash_{L^*} = (\vdash_L)^*$ für jede Sprache $L \subseteq \Sigma^*$. (4 Punkte)

Daraus folgt, wie in der Vorlesung gezeigt, daß die Relationeninterpretation $R(r) \subseteq M \times M$ eines regulären Ausdrucks r durch die Relationen R_a und die Sprachinterpretation $L(r) \subseteq \Sigma^*$ bestimmt ist: $R(r) = \vdash_{L(r)}$.