Übungsaufgaben
Automaten und Formale Sprachen

Universität München, CIS, WS 2005/2006

Ausgabe Mo 31.10.2005 Abgabe: Mo 7.11. 2005

Aufgabe 2.1 Eine Abbildung $h : M \to N$ ist ein *Homomorphismus* zwischen den Monoiden $\mathcal{M} = (M, \cdot^M, 1^M)$ und $\mathcal{N} = (N, \cdot^N, 1^N)$, wenn $h(1^M) = 1^N$ und $h(a \cdot^M b) = h(a) \cdot^N h(b)$ für alle $a, b \in M$.

Definiere für $a \in \Sigma$ die Abbildung $|\cdot|_a : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ durch $|w|_a :=$ die Anzahl der Vorkommen von a in w.

(a) Zeige, daß die Abbildung $|\cdot|_a : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ ein Homomorphismus zwischen den Monoiden $(\Sigma^*, \cdot, \epsilon)$ und $(\mathbb{N}, +, 0)$ ist. (2 Punkte)

(b) Seien $f, g : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ zwei Homomorphismen zwischen den Monoiden $(\Sigma^*, \cdot, \epsilon)$ und $(\mathbb{N}, +, 0)$. Zeige, daß dann auch die Abbildung $(f + g) : \Sigma^* \to \mathbb{N}$, mit

$$(f + g)(w) := f(w) + g(w),$$

ein Homomorphsimus zwischen diesen Monoiden ist. (3 Punkte)

(c) Folgere aus (b), daß für $a, b \in \Sigma$ auch die Abbildung

$$|\cdot|_{a,b} : \Sigma^* \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad |w|_{a,b} := |w|_a + |w|_b$$

ein Monoid-Homomorphismus zwischen $(\Sigma^*, \cdot, \epsilon)$ und $(\mathbb{N}, +, 0)$ ist. (1 Punkt)

(d) Folgere weiter, daß auch die Wortlänge $|\cdot| : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ ein Homomorphismus zwischen $(\Sigma^*, \cdot, \epsilon)$ und $(\mathbb{N}, +, 0)$ ist. (1 Punkt)

(e) Ist, in der umgekehrten Richtung, $p_a : \mathbb{N} \to \Sigma^*$ mit $p_a(n) := a^n$ (mit $a^0 := \epsilon$, $a^{k+1} := a^k \cdot a$) ein Homomorphismus zwischen $(\mathbb{N}, +, 0)$ und $(\Sigma^*, \cdot, \epsilon)$? (1 Punkt)

(f) Seien für $a, b \in \Sigma$ die Abbildungen $p_a, p_b : \mathbb{N} \to \Sigma^*$ wie in (e) definert. Ist dann die durch

$$(p_a \cdot p_b)(n) := p_a(n) \cdot p_b(n)$$

definierte Abbildung $p_a \cdot p_b : \mathbb{N} \to \Sigma^*$ ein Homomorphismus von $(\mathbb{N}, +, 0)$ und $(\Sigma, \cdot, \epsilon)$? (2 Punkte)

Aufgabe 2.2 Sei $f : M^k \to M$ und $\bar{f} : (2^M)^k \to 2^M$ die "durch punktweise Anwendung von f" (oder "durch Anhebung von f auf Mengen"), also durch

$$\bar{f}(A_1, \ldots, A_k) := \{\, f(a_1, \ldots, a_k) \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_k \in A_k \,\} \quad \text{für } A_1, \ldots, A_k \subseteq M,$$

definierte Abbildung. Zeige, daß $\bar{f}$ in jedem Argument bezüglich $\subseteq$ monoton ist, also

$$A_1 \subseteq B_1 \wedge \ldots \wedge A_k \subseteq B_k \implies \bar{f}(A_1, \ldots, A_k) \subseteq \bar{f}(B_1, \ldots, B_k). \qquad \text{(1 Punkt)}$$

Aufgabe 2.3 Sei für $L, M \subseteq \Sigma^*$ und $\Sigma = \{a, b, \ldots, y, z\}$

$$L \cdot M := \{\, u \cdot v \mid u \in L, v \in M \,\} \quad \text{und} \quad L/M := \{\, w \in \Sigma^* \mid \{w\} \cdot M \subseteq L \,\}.$$

(a) Berechne für $L_1 = \{geh, sag\}$ und $M = \{e, st, t, en\}$ das Produkt $L_1 \cdot M$. (1 Punkt)

(b) Berechne für $L_2 = \{gehe, gehen, gehst, geht, sage, sagen\}$ und $M = \{e, st, t, en\}$ den Quotienten L_2/M. (1 Punkt)

(c) Zeige, daß $L/M \cdot M \subseteq L$ gilt. (1 Punkt)

(d) Zeige, daß

$$L/(M_1 \cup M_2) = L/M_1 \,\cap\, L/M_2 \qquad \text{und} \qquad (L_1 \cap L_2)/M = L_1/M \,\cap\, L_2/M$$

gelten und folgere daraus, daß die Sprachdivision / folgende Monotonie-Eigenschaft hat:

$$L_1 \subseteq L_2 \wedge M_1 \subseteq M_2 \Longrightarrow L_1/M_2 \subseteq L_2/M_1.$$

(Analog: $l_1 \leq l_2 \wedge m_1 \leq m_2 \Longrightarrow l_1/m_2 \leq l_2/m_1$ bei Zahlen, sofern die l_i/m_j existieren.) (4 Punkte)

Bemerkung: Wir hatten für Wörter $u, v, w \in \Sigma^*$ *partielle* Divisionen $u\backslash w$ und w/v definert, durch

$$u\backslash w = v \iff u \cdot v = w \iff w/v = u.$$

(Falls w nicht mit u beginnt bzw. mit v endet, ist $u\backslash w$ bzw. w/v nicht definiert.)

Aber die Divisionen \ und / für Wort*mengen* L, M sind total. Es gilt: $\{w\}/\{v\} \neq \emptyset \iff w/v$ existiert.