Übungsaufgaben
Automaten und Formale Sprachen

Universität München, CIS, WS 2005/2006

Ausgabe Di 25.10.2005 Abgabe: Mo 31.10. 2005

Aufgabe 1.1 Sei $\Sigma = \{a, b, \ldots, z\}$ das lateinische Alphabet und $u \cdot v$ die Verkettung der Wörter $u, v \in \Sigma^*$. Wir haben die Verkettung zweier Sprachen $M, N \subseteq \Sigma^*$ durch "Anheben" der Wortverkettung auf Wortmengen definiert:

$$M \cdot N := \{\, u \cdot v \mid u \in M, v \in N \,\}.$$

Was können Sie über die Anzahl $|M \cdot N|$ sagen?

(a) Geben Sie ein Beispiele für M und N an, wo $|M \cdot N| = |M| \cdot |N|$ ist.

(b) Geben Sie ein Beispiele für M und N an, wo $|M \cdot N| \neq |M| \cdot |N|$ ist.

Wählen sie kleine M, N, damit Sie $M \cdot N$ noch hinschreiben können. (4 Punkte)

Aufgabe 1.2 Ein Monoid $\mathcal{M} = (M, \cdot^M, 1^M)$ besteht aus eine Menge M, einer assoziativen Abbildung $\cdot^M : M \times M \to M$ und einem Element $1^M \in M$, das bezüglich $\cdot^M$ "neutral" ist, d.h. für jedes $m \in M$ ist $m \cdot^M 1^M = m = 1^M \cdot^M m$.

Welche der folgenden Strukturen sind Monoide, welche nicht? Begründen Sie Ihre Antwort!

(a) $\mathcal{M} = (\mathbb{Z}, +, 0)$, die ganzen Zahlen mit der üblichen Addition als $\cdot^M$ und der üblichen 0 als 1^M,

(b) $\mathcal{M} = (\Sigma^*, \circ, \epsilon)$, wobei

$$u \circ v := \begin{cases} u, & \text{falls } v = \epsilon, \\ v, & \text{falls } u = \epsilon, \\ \widehat{u \cdot v}, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\cdot$ die Wortverkettung und $\widehat{w}$ aus $w \neq \epsilon$ durch Weglassen des letzten Buchstabens entsteht.

(c) $\mathcal{M} = (\mathbb{N}^{\leq 100}, \circ, 1)$, wobei $\mathbb{N}^{\leq 100} = \{0, 1, \ldots, 100\}$ und $\circ$ die bei 100 "abgeschnittene" Multiplikation

$$n \circ m := \begin{cases} n \cdot m, & \text{falls } n \cdot m \leq 100 \text{ ist,} \\ 100, & \text{sonst,} \end{cases}$$

ist. (Mit $\cdot$ ist die übliche Multiplikation natürlicher Zahlen gemeint.)

(d) $\mathcal{M} = (\Sigma^{\leq k}, \cdot^k, \epsilon)$, wobei $\Sigma^{\leq k} := \{\, w \in \Sigma^* \mid |w| \leq k \,\}$ die Menge aller Wörter w über Σ ist, deren Länge $|w|$ höchstens $k \in \mathbb{N}$ ist, und für solche Wörter u, v sei

$$\begin{aligned} u \cdot^k v &:= \mathit{first}_k(u \cdot v), \\ \mathit{first}_k(w) &:= \text{das längste unter den Präfixen von } w \text{ der Längen} \leq k. \end{aligned}$$

Sie müssen überlegen, ob die jeweilige Operation $\cdot^M$ assoziativ ist und ob 1^M neutral bezüglich dieser Operation ist. (8 Punkte)