Übungsaufgaben
Automaten und Formale Sprachen

Universität München, CIS, WS 2003/2004

Abgabe: Do 05.02.04

Aufgabe 8.1 Sei $t \in \Sigma^+$ ein Text über dem Alphabet Σ. Die Teilwortrelation sei mit

$$w_1 \leq w_2 :\iff u, v \in \Sigma^*(uw_1v = w_2)$$

bezeichnet und die Menge aller Teilwörter von t mit

$$\Sigma^t := \{\, w \in \Sigma^* \mid w \leq t \,\}.$$

Da Σ^t nicht unter Verkettung abgeschlossen ist, definieren wir die Operationen $+, \cdot, ^*$ von 2^{Σ^*} um:

$$A + B := (A \cup B) \cap \Sigma^t, \qquad A \cdot B := (AB) \cap \Sigma^t, \qquad A^* := (A^*) \cap \Sigma^t.$$

(a) Zeige, daß $\mathit{Sub}(t) := (\Sigma^t, +, \cdot, ^*, \emptyset, \{\epsilon\})$ mit diesen Operationen eine Kleene-Algebra ist. (3 Punkte)

(b) Zeige, daß $\mathit{Sub}(t)$ eine stetige Kleene-Algebra ist: (6 Punkte)

  (a) für gerichtete Mengenfamilien $\{\, A_i \subseteq \Sigma^t \mid i \in I \,\}$ ist $\bigcup_{i \in I} A_i$ die kleinste obere Schranke,

  (b) die Operationen $+, \cdot, ^*$ sind stetig, für gerichtete $\{\, A_i \mid i \in I \,\}$ gilt also z.B.

$$A \cdot (\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} (A \cdot B_i).$$

Aufgabe 8.2 Sei G die kontextfreie Grammatik

$$N = p \mid d\ n\ S \tag{1}$$
$$S = r\ N\ V \tag{2}$$
$$V = v \tag{3}$$

über dem Alphabet $\Sigma := \{d, n, r, p, v\}$ (Determinator, Nomen, (Relativ)Pronomen, transitives Verb).

(a) Die „Bedeutung“ von G in 2^{Σ^*} ist das Tupel der kleinsten Sprachen $N, S, V \subseteq \Sigma^*$, das (1)–(3) erfüllt. Berechne die ersten Stadien

$$(N_0, S_0, V_0) := (\emptyset, \emptyset, \emptyset) \subseteq (N_1, S_1, V_1) \subseteq (N_2, S_2, V_2) \subseteq (N_3, S_3, V_3)$$

davon wie im Beweis des Fixpunktsatzes, d.h. das nächste Stadium erhält man durch Auswerten der rechten Seiten aus dem vorigen Stadium. (3 Punkte)

(b) Nach dem Fixpunktsatz hat G in *jeder stetigen* Kleene-Algebra $(K, +, \cdot, ^*, 0, 1)$ mit Elementen d, n, r, p, v eine Bedeutung, eben das kleinste Tupel $(N, S, V) \in K^3$, das (1)–(3) löst. Nach der vorigen Aufgabe hat also G für jedes $t \in \Sigma^+$ auch eine Bedeutung in $\mathit{Sub}(t)$. Da $\mathit{Sub}(t)$ endlich ist, erreicht man den kleinsten Fixpunkt schon nach endlich vielen Stadien der Fixpunktberechnung!

Führe diese Berechnung für den Text

$$t := p\ v\ d\ n\ r\ d\ n\ r\ p\ v\ v$$

durch! (Ab wann unterscheiden sich die Stadien (N_i, S_i, V_i) von denen im Teil (a)?). (5 Punkte)

Aufgabe 8.3 Betrachte zu den rechten Seiten aus (1)–(3) die endlichen Automaten $\mathcal{A}_N$, $\mathcal{A}_S$ und $\mathcal{A}_V$ (mit disjunkten Zustandsnummern) über dem Alphabet $\Sigma \cup \{N, S, V\}$.

(a) Konstruiere den diesem System $(\mathcal{A}_N, \mathcal{A}_S, \mathcal{A}_V)$ von sich gegenseitig aufrufenden endlichen Automaten entsprechenden rekursiven endlichen Automaten $(Q, \vdash_a, \vdash_{call}, \vdash_{return}, I, F)$ (vgl. Skriptum, Kapitel 7.1). (4 Punkte)

(b) Sei $\mathcal{A}$ die disjunkte Vereinigung von $\mathcal{A}_N, \mathcal{A}_S, \mathcal{A}_v$ mit den Anfangs- und Endzuständen von $\mathcal{A}_S$. Konstruiere den aus $\mathcal{A}$ durch Rekursion in S entstehenden rekursiven endlichen Automaten $\mu S(\mathcal{A})$ nach dem Verfahren der Vorlesung (vgl. Skriptum, Kapitel 7.1). (4 Punkte)

Bei Fragen eine Email an `leiss@cis.uni-muenchen.de` *schicken!* (Ich habe nicht alles durchgerechnet).