Übungsaufgaben
Automaten und Formale Sprachen

Universität München, CIS, WS 2003/2004

Abgabe: Do 13.11.03

Aufgabe 2.1 Für jedes $a \in \Sigma$ sei $R_a \subseteq M \times M$ eine zweistellige Relation auf der Menge M. Für Relationen $R, S \subseteq M \times M$ seien wie üblich

$$R \circ S \quad := \quad \{ \langle k, m \rangle \in M \times M \mid \exists l \in M(\langle k, l \rangle \in S \wedge \langle l, m \rangle \in S) \}$$

das Relationenprodukt von R und S und

$$R^* \quad := \quad \bigcap \{ S \subseteq M \times M \mid 1_M \subseteq S,\ S \circ S \subseteq S,\ R \subseteq S \}$$

die reflexive, transitive Hülle von R. Definiere für $L \subseteq \Sigma^*$ die Relation

$$\vdash_L \quad := \quad \bigcup \{ \vdash_w \mid w \in L \} \quad \subseteq M \times M,$$

und dazu für $w \in \Sigma^*$ die Relation $\vdash_w$ induktiv durch

$$\vdash_\epsilon \quad := \quad 1_M, \qquad \vdash_a \quad := \quad R_a, \qquad \vdash_{va} \quad := \quad \vdash_v \circ \vdash_a .$$

(a) Zeige, daß $\vdash_{L \cdot L'} = \vdash_L \circ \vdash_{L'}$ für Sprachen $L, L' \subseteq \Sigma^*$. (3 Punkte)

(b) Zeige (mit Hilfe von (a)), daß $\vdash_{L^*} = (\vdash_L)^*$ für jede Sprache $L \subseteq \Sigma^*$. (4 Punkte)

Daraus folgt, wie in der Vorlesung gezeigt, daß die Relationeninterpretation $R(r) \subseteq M \times M$ eines regulären Ausdrucks r durch die Relationen R_a und die Sprachinterpretation $L(r) \subseteq \Sigma^*$ bestimmt ist: $R(r) = \vdash_{L(r)}$.

Aufgabe 2.2 Sei $A_1 = \{abb, aab, aba\}$ und $A_2 = \{ (abaa)^n \mid 1 \leq n \leq 10 \}$. Berechne die Bedeutung $L(r)[A_1, A_2]$ für den regulären Ausdruck $r = (aX_1)^* + X_2 X_1$ (3 Punkte)

Aufgabe 2.3 Man gebe einen regulären Ausdruck r über $\Sigma = \{a, b, c\}$ an, sodaß $L(r)$ aus allen Wörtern $w \in \Sigma^*$ mit der Eigenschaft

$$\varphi(w) :\Longleftrightarrow \text{ die Anzahl der Vorkommen von } b \text{ in } w \text{ ist eine gerade Zahl}$$

besteht. (2 Punkte)

Aufgabe 2.4 Sei $M = N^2$ die Menge aller Paare $\langle k, m \rangle$ von natürlichen Zahlen aus $N := \{0, 1, \ldots, 9\}$. Wir rechnen mit den Operationen $\dot{+}$ und $\dot{-}$ von $N \times N$ nach N, wobei

$$n \dot{+} m := \min\{9, n + m\}, \qquad m \dot{-} n := \max\{0, m - n\}.$$

Man stelle sich vor, daß Zahlen aus N im Datenspeicher einer Maschine unter den Adressen x und y gespeichert sind. Ist $f : N^2 \to N$, so hat die Zuweisung

$$\cdot \to \boxed{x \leftarrow f(x, y)} \to \cdot$$

als relationale Bedeutung die folgende Relation zwischen dem Speicherzustand vor und nach Ausführung der Zuweisung:

$$\boxed{x \leftarrow f(x, y)}^{R(M)} := \{ (\langle m, n \rangle, \langle f(m, n), n \rangle) \mid m, n \in N \}.$$

Betrachte solche Zuweisungen als Elemente eines Alphabets Σ von atomaren Programmen.

(a) Seien $a := (y \leftarrow x \dot{+} y)$ und $b := (x \leftarrow x \dot{-} 2)$ atomare Programme. Berechne die relationale Bedeutung $(a;b)^{R(M)}$ des zusammengesetzten Programms

$$(a;b) := \quad \cdot \to \boxed{\boxed{y \leftarrow x \dot{+} y} \to \ \cdot \ \to \boxed{x \leftarrow x \dot{-} 2}} \to \ \cdot$$

(3 Punkte)

(b) Wir wollen nun eine relationale Bedeutung für Programme der Form

$$\textit{while } t \textit{ do } r$$

definieren, wobei t ein Testausdruck (s.u.) und r ein regulärer Ausdruck ist. Ein Test t soll den gegenwärtigen Speicherzustand prüfen und, falls die Bedingung t nicht erfüllt ist, weitere Zustandsübergänge verhindern. Das wird durch Teilrelationen der Identität auf M wie folgt modelliert.

Einem Testausdruck t entspricht eine *Eigenschaft* $t^{E(M)} \subseteq M$ der Speicherzustände, die den Test erfüllen, und dieser eine Zustandsübergangs*relation*

$$t^{R(M)} := \ 1_{t^{E(M)}} \quad := \quad \{ \langle m, m \rangle \in M \times M \mid m \in t^{E(M)} \} \quad \subseteq 1_M. \tag{1}$$

Dem Scheitern des Tests entspricht die Relation

$$\overline{t}^{R(M)} \quad := 1_{\overline{t}^{E(M)}} \quad := \quad \{ \langle m, m \rangle \in M \times M \mid m \notin t^{E(M)} \} \quad \subseteq 1_M. \tag{2}$$

Wir betrachten Testausdrücke wie $(x \leq y)$ oder $(0 < x)$, mit ihrer naheliegenden Interpretation als Eigenschaft von Elementen $\langle k, l \rangle \in M$, z.B.

$$(0 < x)^{E(M)} := \{ \langle k, l \rangle \in M \mid 0 < k \}.$$

Jeder Testausdruck t ist ein atomarer regulären Ausdruck, der nach (1) interpretiert wird. Damit fassen wir ein *while*-Programm als Abkürzung auf:

$$(\textit{while } t \textit{ do } r) \quad := \quad ((t;r)^*; \overline{t}) \tag{3}$$

Berechne die sich aus (3) ergebende relationale Bedeutung für das *while*-Programm

$$(\textit{while } t \textit{ do } (a;b)) := (\textit{while } x > 5 \textit{ do } ((y \leftarrow x \dot{+} y); (x \leftarrow x \dot{-} 2))),$$

und dazu erst die Bedeutung der Teilausdrücke $(t; (a;b))$ und $(t; (a;b))^*$. (5 Punkte)

Stelle dann die Relation $(\textit{while } t \textit{ do } (a;b))^{R(M)} \subseteq M \times M$ graphisch dar. (2 Punkte)