Übungsaufgaben
Automaten und Formale Sprachen

Universität München, CIS, WS 2003/2004

Abgabe: Do 6.11.2003

Aufgabe 1.1 Eine 2-stellige Funktion $+ : A \times A \to A$ heißt (a) IDEMPOTENT, wenn $a + a = a$ für alle $a \in A$, (b) ASSOZIATIV, wenn $a + (b + c) = (a + b) + c$ für alle a, b und $c \in A$, und (c) KOMMUTATIV, wenn $a + b = b + a$ für alle a und $b \in A$. Definiere auf A eine zweistellige Relation $\leq$ durch

$$b \leq c \quad :\Longleftrightarrow \quad b + c = c.$$

Man zeige:

(a) $\leq$ ist reflexiv genau dann, wenn $+$ idempotent ist, (1 Punkt)

(b) $\leq$ ist transitiv, wenn $+$ assoziativ ist, (1 Punkt)

(c) $\leq$ ist antisymmetrisch, wenn $+$ kommutativ ist. (1 Punkt)

Wenn also $+$ idempotent, assoziativ, und kommutativ ist, so ist $\leq$ eine partielle Ordnung.

(d) Zeige durch Beispiele, daß man in (b) und (c) das „wenn“ nicht durch ein „genau dann, wenn“ ersetzen kann. (3 Punkte)

Bem. Ist $+$ die Vereinigung von Mengen, so ist $\leq$ die Teilmengenbeziehung $\subseteq$.

Aufgabe 1.2 Welche der Eigenschaften: reflexiv, transitiv, symmetrisch, irreflexiv, antisymmetrisch hat

(a) die Teilwortbeziehung v *ist Teilwort von* $w :\Longleftrightarrow \exists u_1 \in \Sigma^* \exists u_2 \in \Sigma^*\ w = u_1 v u_2$? (1 Punkt)

(b) die lexikographische Ordnung $v \leq_{lex} w$ (wie in der Vorlesung definiert)? (1 Punkt)

Aufgabe 1.3 Sei $(\Sigma, <_\Sigma)$ ein (strikt) total geordnetes Alphabet. Definiere eine Funktion $add(w, L)$, die ein Wort $w \in \Sigma^*$ so in eine endliche, lexikographisch geordnete Liste $L = [w_1, w_2, \ldots, w_k]$ von Wörtern $w_i \in \Sigma^*$ einordet, daß die lexikographisch geordnete Liste der Wortmenge $\{w, w_1, \ldots, w_n\}$ entsteht.

(a) Benutzen Sie die (z.B. aus PROLOG) bekannten Funktionen zum Erkennen der leeren Liste ($L = [\,]$), zum Zerlegen einer Liste in Kopf und Rest ($L = [K|R]$), und zum Einfügen eines Elements am Kopf einer Liste ($[E|L]$), und nehmen Sie an, die Testfunktion $v \leq_{lex} w$ (oder $v <_{lex} w$) sei gegeben.

Sie können die Definition auch gleich als PROLOG-Programm angeben, unter der Annahme, Σ sei die Menge der Ziffern $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \}$ mit der üblichen Ordnung, und jedes w_i sei eine Liste von Ziffern. (3 Punkte)

(b) (Freiwillig) Können sie ein PROLOG-Programm `lexleq` schreiben, das zu zwei Ziffernlisten V und W testet, ob $V \leq_{lex} W$ ist? (3 Punkte)